ÚLTIMA AULA: INTEGRAIS PRIMEIRAS

$y'(t) = f(y(t))$, $f : E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ DE CLASSE C^1.

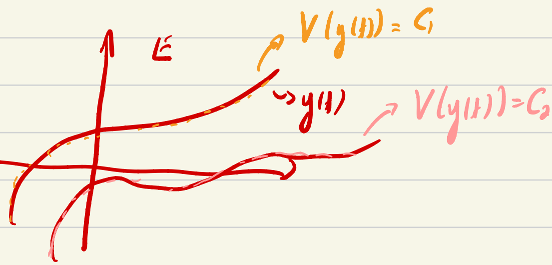
ab → ABERTO

UMA INTEGRAL PRIMEIRA $V : E \to \mathbb{R}$ T.Q.

i) $t \mapsto V(y(t))$ É CONSTANTE PARA TODA SOLUÇÃO y.

ii) V NÃO É CONSTANTE EM ABERTOS DE E

i)

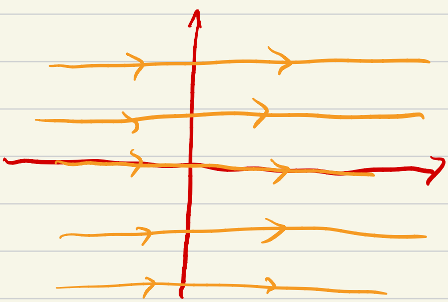


ii)

$V|_U$ NÃO É CONSTANTE, $\forall U \overset{ab}{\subset} E$.

EXEMPLO: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ DADA POR $f(y) = (1, 0, \dots, 0)$.

$y'(t) = f(y(t)) \Rightarrow y(t) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n)$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.



INTEGRAIS PRIMEIRAS:

$V_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V_2(x_1, \dots, x_n) = x_2$.

$V_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_3$.

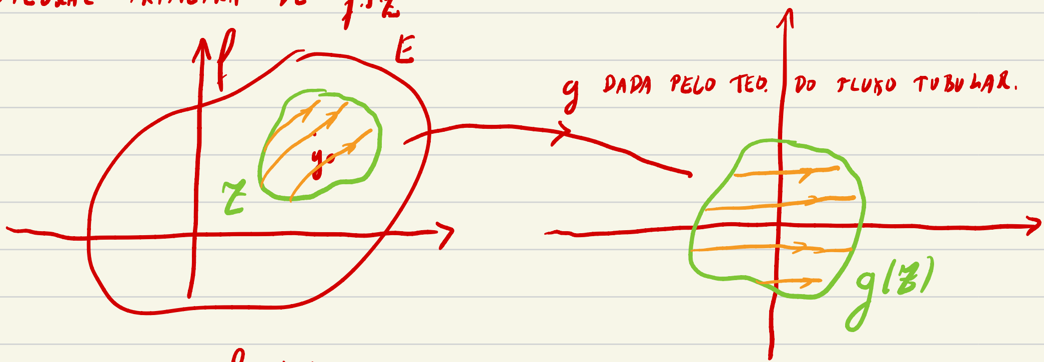
$\vdots$ $\quad\quad\quad\quad \vdots$

$V_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$

$V_2, \dots, V_n$ SÃO INTEGRAIS PRIMEIRAS.

i) $V_j(y(t)) = y_j = \text{cte}$, ii) $V_j|_U$ NÃO É CONSTANTE, $\forall U \subset \mathbb{R}^n$.

Curiosidade: Se $f: E \to \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in E$ é $\overset{\text{tal que}}{\text{t.q.}}$ $f(y_0) \neq 0$ (y_0 é ponto regular), então $\exists\, Z \subset E$, Z é aberto e $V: Z \to \mathbb{R}$ uma integral primeira de $f|_Z$.



$f(y_0) \neq 0$

Logo $V_j \circ g$ é integral primeira de $f|_Z$, $j = 2, \ldots, n$.

↳ o mesmo do exemplo anterior

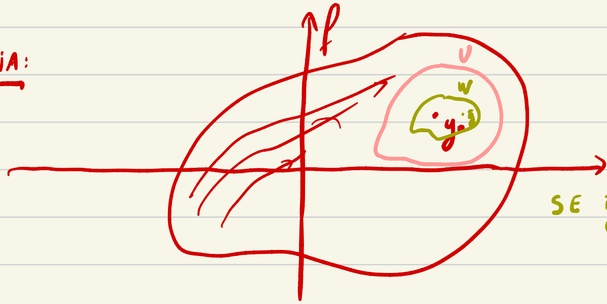
De fato,

i) $V_j \circ g(y(t)) = V_j(g(\underbrace{\phi_t}_{\text{fluxo de } f}(y)) = V_j(\underbrace{\psi_t}_{\text{fluxo tubular}}(g(y)) = \text{constante}$

ii) $V_j \circ g|_U = V_j|_{g(U)}$ não é constante, $\forall\, U \overset{ab}{\subset} Z$.

Estabilidade de Singularidades

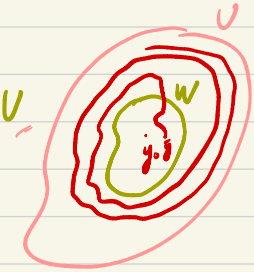
Ideia:



$y'(t) = f(y(t))$

Dado U, $\exists\, W$ t.q.

se $\bar{y} \in W$, $\phi_t(\bar{y}) \in U$



$f(y_0)=0$ (y_0 singularidade).

$y(t)=y_0$, $\forall t$ é solução

$\phi_t(\bar{y})$ nunca sai de U.

Definição

Def. Seja $f : E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. e x_0 uma singularidade de f ($f(x_0)=0$). Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio <u>estável</u> se para qualquer aberto $U \subset E$, $x_0 \in U$, $\exists$ um aberto W de x_0 t.q.

1) $W \subset U$ e para todo $x \in W$, a solução de $y'(t)=f(y(t))$, $y(0)=x$ está definida para todo $t \geq 0$.

2) A solução de $y'(t)=f(y(t))$, $y(0) \in W$ está contida em U, $\forall t \geq 0$.

OBS: Seja ϕ o fluxo de f. Então

1) $\phi_t(x)$ está bem definido $\forall t \geq 0$ se $x \in W$.

2) $\phi_t(x) \in U$, se $x \in W$ ($\phi_t(W) \subset U$).

<u>Proposição:</u> x_0 é ponto de equilíbrio estável $\Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. se $\|x - x_0\| < \delta$, então $\phi_t(x)$ está definido $\forall t \geq 0$ e $\|\phi_t(x) - x_0\| < \varepsilon$

$f(y_0) = 0$

<u>Demo:</u> $(\Rightarrow)$ Dado $\varepsilon > 0$, definimos $U := B(x_0, \varepsilon) = \{x \in E;\ \|x - x_0\| < \varepsilon\}$

Como x_0 é ponto de equilíbrio estável, então $\exists\, Z \subset U$, Z é aberto e $x_0 \in Z$, e tal que $\phi_t(x)$ está bem definido $\forall x \in Z$ e $\phi_t(x) \in U$, $x \in Z$.

Como Z é aberto e $x_0 \in Z$, então $\exists \delta > 0$ t.q. $B(x_0, \delta) \subset Z$. Assim, se $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow x \in B(x_0, \delta) \subset Z \Rightarrow \phi_t(x) \in U$, $\forall t \geq 0$.

$$\Rightarrow \phi_t(x) \in B(x_0, \varepsilon) \Rightarrow \|\phi_t(x) - x_0\| < \varepsilon.$$

$(\Leftarrow)$ Seja U um aberto de E, $x_0 \in U$. Logo $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $B(x_0, \varepsilon) \subset U$.

Assim, $\exists \delta > 0$ t.q. se $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x) - x_0\| < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$. Seja

$W := B(x_0, \delta)$. Logo

$x \in W \Rightarrow x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x) - x_0\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \phi_t(x) \in B(x_0, \varepsilon) \Rightarrow \phi_t(x) \in U$. $\blacksquare$

EXEMPLO: $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

O FLUXO É DADO POR $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\phi_t(x_0, y_0) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

PONTOS DE EQUILÍBRIO $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_0, y_0) = (0,0)$.

AFIRMAÇÃO: $(0,0)$ É PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL.

DEMO: DADO $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \varepsilon > 0$ T.Q.

$$\|(x_0, y_0) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x_0, y_0) - (0,0)\| < \varepsilon.$$

DE FATO, $\|(x_0, y_0) - (0,0)\| = \|(x_0, y_0)\| < \delta = \varepsilon$.

$$\|\phi_t(x_0,y_0) - (0,0)\|^2 = \|\phi_t(x_0,y_0)\|^2 = x_0^2 \cos^2 t + y_0^2 \sin^2 t + 2x_0 y_0 \sin t \cos t + x_0^2 \sin^2 t + y_0^2 \cos^2 t - 2x_0 y_0 \sin t \cos t = x_0^2 + y_0^2$$

$$= \|(x_0, y_0)\|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\phi_t(x_0,y_0) - (0,0)\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

DEFINIÇÃO: SEJA $x_0 \in E$ UMA SINGULARIDADE. DIZEMOS QUE y_0 É PONTO DE EQUILÍBRIO INSTÁVEL SE NÃO FOR ESTÁVEL.

OBS: EQUIVALÊNCIA DE INSTABILIDADE: SEJA y_0 T.Q. $f(y_0) = 0$

LOGO y_0 É INSTÁVEL SE $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ T.Q. PARA QUALQUER $\delta > 0$, $\exists$ $x \in E$ E $t > 0$ T.Q.

- $\|x - y_0\| < \delta$
- $\|\phi_t(x) - y_0\| > \varepsilon_0$ OU $\phi_t(x)$ NÃO ESTÁ DEFINIDO

EXEMPLO: $y'(t) = y(t) \Rightarrow y(t) = y_0 e^t$.

FLUXO $\phi_t(x_0) = x_0 e^t$

PONTO DE SINGULARIDADE 0.

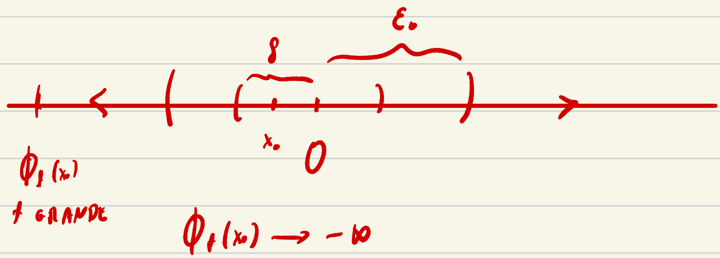
AFIRMAÇÃO: 0 É INSTÁVEL.

Seja $\varepsilon_0 = 1$. Dado $\delta > 0$, definimos $x_0 = \frac{\delta}{2}$. Assim,

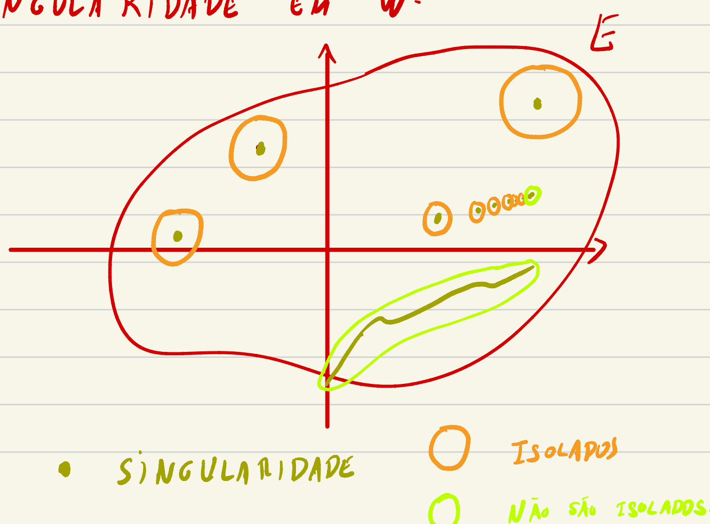
se $t > \max\{0, \ln(\frac{2\varepsilon_0}{\delta})\}$, temos

- $\|x_0 - 0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ✓
- $\|\phi_t(x_0) - 0\| = \frac{\delta}{2}e^t > \frac{\delta}{2}e^{\ln(\frac{2\varepsilon_0}{\delta})} = \varepsilon_0$ ✓

Ilustração:



Definição: Dizemos que $x_0 \in E$ é um ponto de equilíbrio (singularidade) isolada se $\exists$ um aberto $x_0 \in W \overset{ab}{\subset} E$ t.q. x_0 é a única singularidade em W.

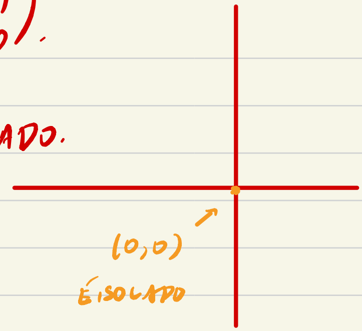


$f(x,y) = (y,-x)$

EXEMPLOS 1) $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

PONTO DE EQUILÍBRIO: $(0,0)$. ELE É ISOLADO.

(BASTA ESCOLHER $W = \mathbb{R}^2$).



2) $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = (-x,0)$

PONTOS DE EQUILÍBRIO: $\{(0,y) \,;\, y \in \mathbb{R}\}$

$f(x,y) = 0 \iff x = 0$

NÃO SÃO ISOLADOS.

PERGUNTA: NO EXEMPLO 2, ELES SÃO ESTÁVEIS?

$\phi_t(x,y) = (xe^{-t}, y) = e^{tA}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

É ESTÁVEL! SEJA $(0,y_0)$ UMA SINGULARIDADE E $\varepsilon > 0$. LOGO ESCOLHENDO $\forall\, 0 < \delta < \varepsilon$, TEMOS

$$\|(x,y) - (0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x,y) - (0,y_0)\| = \|(xe^{-t}, y) - (0,y_0)\|$$

$$= \sqrt{(xe^{-t})^2 + (y-y_0)^2} \leq \sqrt{x^2 + (y-y_0)^2} = \|(x,y) - (0,y_0)\| < \delta < \varepsilon.$$

3) $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

PONTOS DE EQUILÍBRIO NÃO ISOLADOS E INSTÁVEIS

PONTOS DE EQUILÍBRIO.

DEFINIÇÃO: SEJA x_0 UMA SINGULARIDADE DE $f: E \to \mathbb{R}^n$.

DIZEMOS QUE x_0 É PONTO DE EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

SE

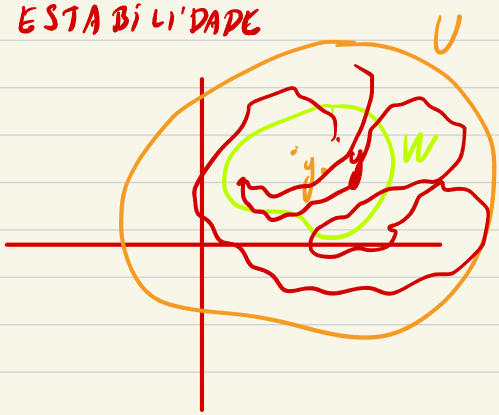
EQUILÍBRIO ESTÁVEL.

1) DADO $x_0 \in U \overset{ab}{\subset} E$, $\exists\, x_0 \in W \overset{ab}{\subset} U$ T.Q. $\phi_t(x) \in U$, $\forall x \in W$. $\forall t \geq 0$

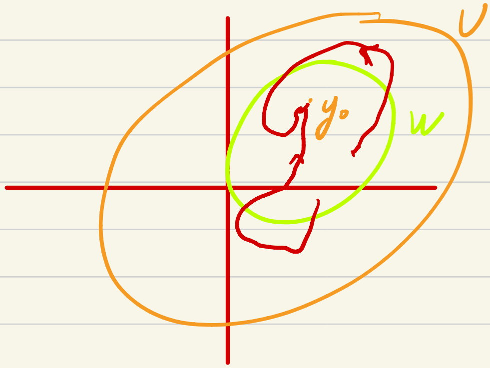
2) $\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = x_0$, $x \in W$.

NOVIDADE.

ESTABILIDADE



ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

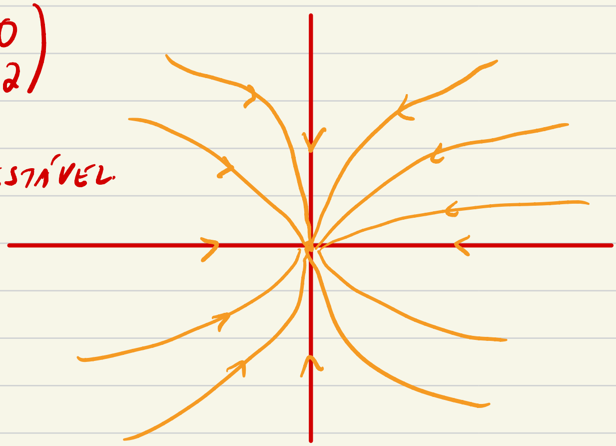


EXEMPLOS:

1) $y' = Ay \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(0,0) É
ESTÁVEL, MAS NÃO É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

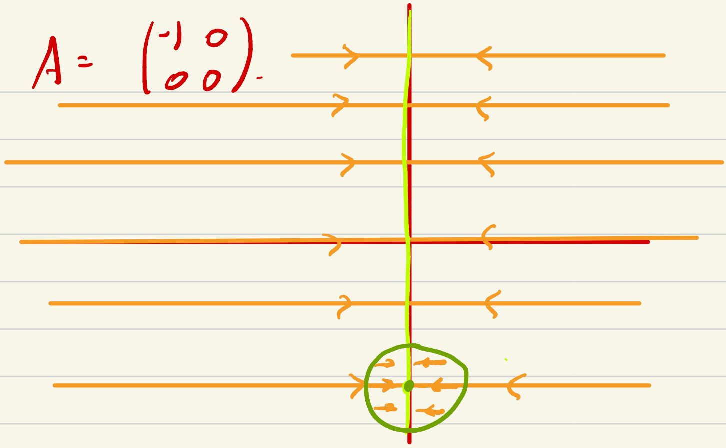
2) $y' = Ay \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



(0,0) É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL

(PORTANTO TAMBÉM ESTÁVEL).

3) $y'(t) = A\,y(t) \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$



$(0, y),\ y \in \mathbb{R}$ SÃO EQUILÍBRIOS

- NÃO ISOLADOS ✓
- ESTÁVEIS ✓
- NÃO SÃO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS. ✓