EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

Data de entrega: dia 25 de fevereiro de 2021.
Resolva individualmente. Não aceitarei listas de exercícios iguais.

1. Equação de Laplace

Neste exercício, queremos achar a função de Green para o bilaplaciano Δ^2, ou seja, o laplaciano aplicado duas vezes:

$$\Delta^2 u = \Delta\Delta u = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}.$$

Abaixo $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto limitado de classe C^∞.

a) Mostre que se $u \in C^4(\overline{U})$ e $v \in C^2(\overline{U})$, então

$$\int_U \Delta u(y)\Delta v(y)dy = \int_U v(y)\Delta^2 u(y)dy + \int_{\partial U}\left(\Delta u(y)\frac{\partial v}{\partial \nu}(y) - v(y)\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(y)\right)dS(y).$$

Dica: Use a segunda identidade de Green do formulário com escolhas adequadas de f e g.

b) Mostre que se $u \in C^4(\overline{U})$ e $v \in C^4(\overline{U})$, então

$$\int_U u(y)\Delta^2 v(y) - v(y)\Delta^2 u(y)dy = \int_{\partial U}\left(u(y)\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Delta v(y) + \Delta u(y)\frac{\partial v}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(y)v(y)\right)dS(y).$$

Dica: Use o resultado do item a).

c) Seja $v : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ a função $v(x) = \frac{1}{8\pi}|x|^2\ln(|x|)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Mostre que v é a solução fundamental de Δ^2, isto é, $\Delta^2 v(x) = \delta_0$.
Dica: Mostre que $\Delta v(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\ln(|x|)$.

d) Mostre que

$$u(x) = \int_U v(y-x)\Delta^2 u(y)dy + \int_{\partial U}\left(\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}(y-x)u(y) - \Delta v(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) + \frac{\partial v}{\partial \nu}(y-x)\Delta u(y) - v(y-x)\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(y)\right)dS(y).$$

Dica: Use a Proposição 2 do formulário e o resultado do item a) com $v(y-x)$ no lugar de $v(y)$. Observe que, pelo item c), $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} - \Delta v(x)$, em que Φ é a solução fundamental de $-\Delta$.

Para os dois últimos itens abaixo, vamos supor que $u \in C^4(\overline{U})$ seja solução do seguinte problema:

$$\begin{array}{rcll} \Delta^2 u(x) &=& f(x), & x \in U \\ u(x) &=& g(x), & x \in \partial U \\ \Delta u(x) &=& h(x), & x \in \partial U \end{array},$$

em que $f \in C(\overline{U})$, $g \in C^4(\partial U)$ e $h \in C^2(\partial U)$.

e) Para cada $x \in U$, suponha que exista uma função $\phi^x \in C^4(\overline{U})$ tal que

$$\begin{array}{rcll} \Delta^2 \phi^x(y) &=& 0, & y \in U \\ \phi^x(y) &=& v(y-x), & y \in \partial U \\ \Delta\phi^x(y) &=& \Delta v(y-x), & y \in \partial U \end{array}. \tag{1.1}$$

Mostre que

$$-\int_U \phi^x(y)\Delta^2 u(y)dy = \int_{\partial U}\left(g(y)\frac{\partial \Delta\phi^x}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Delta v(y-x) + h(y)\frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(y)v(y-x)\right)dS(y).$$

Dica: Aplique a fórmula do item *b*) para as funções ϕ^x e u.

f) Defina a função $G(x,y) = v(y-x) - \phi^x(y)$ e mostre usando os itens d) e e) que

$$u(x) = \int_U G(x,y)\Delta^2 u(y)dy + \int_{\partial U}\left(\frac{\partial \Delta G}{\partial \nu}(x,y)g(y) + \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)h(y)\right)dS(y).$$

Observação: No item d), para usar a dica e a fórmula do item a), a função v deveria pertencer a $C^2(\overline{U})$. No entanto, poderíamos justificar o uso da fórmula aplicando-a na região $U\backslash B(x,\epsilon)$ e tomando o $\epsilon \to 0$. Não é necessário fazer esta justificativa aqui.

Formulário.

Proposição 1. *A função $\Phi : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|)$ é tal que $-\Delta\Phi = \delta_0$. Essa função é chamada de solução fundamental de $-\Delta$.*

Proposição 2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $u \in C^2(\overline{U})$. Logo*

$$u(x) = \int_{\partial U} \left(\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)dy.$$

Teorema 3. *(Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $u \in C^1\left(\overline{U};\mathbb{R}^n\right)$. Logo*

$$\int_U \nabla .u(y)dy = \int_{\partial U} u(y).\nu(y)dS(y), \tag{1.2}$$

em que $\nu(y) \in \mathbb{R}^n$ é a normal que aponta para fora de U no ponto $y \in \partial U$.

Proposição 4. *(2° identidade de Green) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $f, g \in C^2(\overline{U})$. Logo*

$$\int_U \left(f(y)\Delta g(y) - g(y)\Delta f(y)\right) dy = \int_{\partial U} \left(f(y)\frac{\partial g}{\partial \nu}(y) - g(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) \right) dS(y).$$

2. Equação do calor.

Considere a seguinte equação:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t), & x \in]0,\pi[, t > 0 \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x), & x \in]0,\pi[\end{array} . \tag{2.1}$$

O objetivo é achar uma expressão da solução da Equação (2.1) usando o método de separação de variáveis. (Não faremos a demonstração rigorosa de que a expressão obtida de fato é solução).

a) Ache todas as soluções do tipo $u(x,t) = X(x)T(t)$ da equação abaixo:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t), & x \in]0,\pi[, t > 0 \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & t > 0 \end{array} .$$

(Dica: Primeiro ache as soluções $u(x,t) = X(x)T(t)$ de $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t)$ e depois use as condições de contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$)

b) Some todas as soluções obtidas no item a) e conclua que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(n^2+1\right)t} \mathrm{sen}\,(nx)\,. \tag{2.2}$$

c) Para $t = 0$, multiplique a Equação (2.2) por $\mathrm{sen}(mx)$, $m \in \{1,2,...\}$, e integre tudo de 0 até π. Conclua que

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \mathrm{sen}(my) dy.$$

Faça as contas de maneira formal, isto é, não precisa justificar a troca de ordem entre a integral e a somatória.

Formulário. $\mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$.

3. Equação de Onda.

Consideremos a equação abaixo para g e h em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &=& \Delta u(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty[\\ u(x,0) &=& g(x), & x\in\mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &=& h(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{array}.$$

Vamos definir

$$\begin{array}{rcl} U(x,r,t) &:=& ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \\ G(x,r) &:=& ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y) \\ H(x,r) &:=& ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y) \end{array}$$

Vimos em sala de aula que, para cada $x\in\mathbb{R}^n$ fixo, U satisfaz a Equação de Euler-Poisson-Darboux.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) + \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t), & r\geq 0, t\geq 0 \\ U(x,r,0) = G(x,r), \frac{\partial U}{\partial t}(x,r,0) = H(x,r), & r\geq 0 \end{array}$$

a) Suponha que $n=5$ e defina $\tilde{U}(x,r,t) = r^2\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) + 3rU(x,r,t)$. Mostre que $\tilde{U}$ é solução da equação abaixo

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x,r,t) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x,r,t), \quad r\geq 0,\ t\geq 0 .$$

(Dica: Use a Equação de Euler-Poisson-Darboux para $n=5$)

b) Determine as funções $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ dadas por $\tilde{G}(x,r) := \tilde{U}(x,r,0)$ e $\tilde{H}(x,r) := \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(x,r,0)$ em termos de G e H.

c) Mostre que

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+}\frac{\tilde{U}(x,r,t)}{3r} = \left(\frac{1}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\right)H(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\right)G(x,t).$$

(Dica: A função $\tilde{U}$ satisfaz a equação da onda na semirreta. Use a solução para $t\geq r\geq 0$)

d) Descreva rapidamente como você poderia resolver a equação de onda para $n=4$, sabendo a resposta para $n=5$.

Formulário.

Teorema 5. *Seja $g\in C^2([0,\infty[)$ e $h\in C^1([0,\infty[)$ tais que $g(0)=g''(0)=0$ e $h(0)=0$. Logo existe uma única solução $u\in C^2([0,\infty[\times[0,\infty[)$ da equação abaixo:*

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,t) &=& \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,t), & (r,t)\in[0,\infty[\times[0,\infty[\\ u(0,t) &=& 0, & t\in[0,\infty[\\ u(r,0) &=& g(r), & r\in[0,\infty[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) &=& h(r), & r\in[0,\infty[\end{array}. \tag{3.1}$$

Essa solução é dada por

$$u(r,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(r+t)+g(r-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} h(y)dy, & r\geq t\geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(r+t)-g(t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} h(y)dy, & t\geq r\geq 0 \end{cases}.$$