

Aula 4 - Análise geométrica 2

Ardson dos S. Vianna Jr.

Departamento de Engenharia Química - USP

5 de fevereiro de 2021

Plano de aula



- 1 Introdução
- 2 Mais pontos
- 3 O que faço com isso?
- 4 Sistemas não lineares
- 5 Sumário

Definições



Solução estacionária: é o ponto do sistema S onde não há variação com o tempo, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(t, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ F_2(t, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ \vdots \\ F_n(t, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Estes pontos podem ser chamados de pontos fixos, pontos de equilíbrio ou pontos estacionários.



- **Ponto estável** é o ponto estacionário que tende a um valor finito quando $t \rightarrow \infty$.
- **Ponto instável** é o ponto estacionário que **não** tende a um valor finito quando $t \rightarrow \infty$.
- **Órbita** é um esboço para uma solução, definida escolhendo parâmetros (por exemplo, $C_1 = 2$ e $C_2 = 1$) para a solução geral, ou seja, trata-se de uma curva parametrizada no plano.

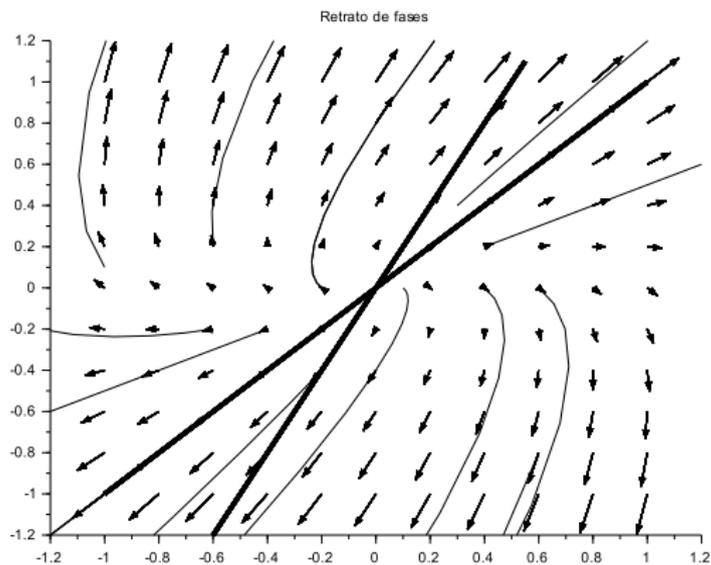


Figura: Retrato de fases para $\frac{dx}{dy} = \frac{x + 2y}{-x + 4y}$



- **Plano de fases** é o plano x_1x_2 em que serão inseridas as órbitas. Observe que não é o comumente usado x_1 versus t ou y versus t .
- **Retrato de fases** é um conjunto de esboços para algumas órbitas, ou curvas parametrizadas. O objetivo do retrato de fases é dar uma ideia do comportamento da solução sem resolver de fato as equações, mas apenas mostrando uma forma esquemática.
- **Separatrizes** retas que separam as regiões do plano de fases

Nó próprio



Resolva o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda_2 y \end{cases} \quad (2)$$

Construindo uma solução com mudança somente nos nomes das variáveis:

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} x_i \quad (3)$$

Nó próprio



exemplo: Resolva o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \rightarrow \frac{dx}{x} = -\lambda_1 dt \rightarrow \rightarrow x(t) = C_2 e^{-\lambda_1 t} \\ \frac{dy}{dt} = -y \rightarrow \frac{dy}{y} = -\lambda_2 dt \rightarrow \rightarrow x(t) = C_4 e^{-\lambda_2 t} \end{cases} \quad (4)$$

A solução geral é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda_2 t} \quad (5)$$

Nó próprio

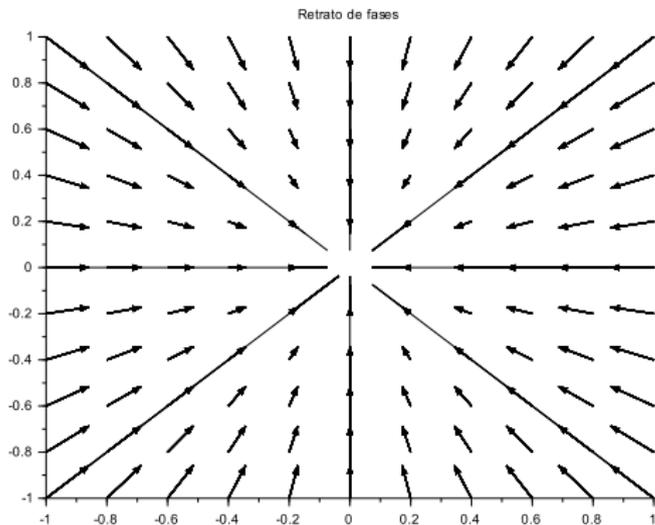


Figura: Retrato de fases para nó próprio



o que faço com isso?



não linear autônomo



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

Contextualizando

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = (1.0 - C) - e^{25} e^{-Q/T} C \\ \frac{dT}{dt} = (350 - T) + 200 e^{25} e^{-Q/T} C - (T - 350) \end{cases} \quad (7)$$

Etapas



- Os pontos de equilíbrio devem ser encontrados.
- Faz-se o processo de linearização em torno destes pontos.
- Transladam-se as variáveis para o ponto $(0,0)$
- Realiza-se a análise geométrica para os pontos de equilíbrio segundo a biblioteca de pontos.
- Retornam-se os pontos para os locais originais e somam-se os diagramas de fases

Método

exemplo: avalie geometricamente o sistema de EDOs



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 + 4y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2 \end{cases} \quad (8)$$

solução:

O processo se inicia com a busca dos pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} -x^2 + 4y^2 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1 \rightarrow -x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

(9)

Método

Agora desenvolvamos a série de Taylor em torno do ponto (x^*, y^*) : 

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) = f_1(x^*, y^*) + \frac{(x-x^*)}{1!} \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + \frac{(y-y^*)}{1!} \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) = f_2(x^*, y^*) + \frac{(x-x^*)}{1!} \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + \frac{(y-y^*)}{1!} \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \end{cases} \quad (10)$$

Fazendo uma translação:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x^* \rightarrow \frac{d\bar{x}}{dt} = \overbrace{f_1(x^*, y^*)}^{=0} + \bar{x} \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + \bar{y} \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \\ \bar{y} = y - y^* \rightarrow \frac{d\bar{y}}{dt} = \underbrace{f_2(x^*, y^*)}_{=0} + \bar{x} \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} + \bar{y} \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} \end{cases}$$

Método



O novo sistema é linear e, assim, basta ser avaliado pelas ferramentas apresentadas no item anterior.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + \bar{y} \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{x} \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + \bar{y} \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \end{cases} \quad (12)$$

Método

Vamos linearizar em torno dos pontos (2,1) e (-2,1). Primeiro temos de calcular as derivadas parciais em cada ponto:



$$\begin{cases} f_1(x) = -x^2 + 4y^2 \rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} = -2x & e & \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} = 8y \\ f_2(x) = 2y - 2 \rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 & e & \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} = 2 \end{cases} \quad (13)$$

ponto (2,1):

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(2,1)} = -2.2 & e & \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{(2,1)} = 8.1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(2,1)} = 0 & e & \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(2,1)} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases} \rightarrow$$

Método



$$\begin{pmatrix} -4 - \lambda & 8 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = -4 \quad (15)$$

Calculados os autovalores, podemos determinar os autovetores, substituindo os λ s na matriz original:

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -4 - 2 & 8 \\ 0 & 2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \quad (16)$$

$$-6x + 8y = 0 \rightarrow \text{para } x = 4, \text{ vem } y = 3 \quad (17)$$

Método



$$\lambda = -4:$$

$$\begin{pmatrix} -4 - (-4) & 8 \\ 0 & -2 - (-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

$$\rightarrow 8y = 0 \rightarrow \text{vem } y = 0 \quad (19)$$

Método



o mesmo para o **ponto (-2,1)**:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\lambda_1 = 2 \quad e \quad \lambda_2 = 4 \quad (21)$$

Método



$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 8 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \quad (22)$$

$$2x + 8y = 0 \rightarrow \text{para } x = 4, \text{ vem } y = -1 \quad (23)$$

$\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 8 \\ 0 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \quad (24)$$

$$0 \cdot x + 8y = 0 \rightarrow \text{para } x = 0, \text{ vem } y = 0 \quad (25)$$

Método

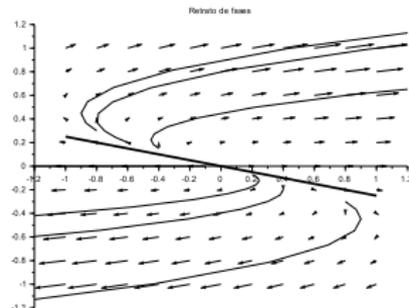
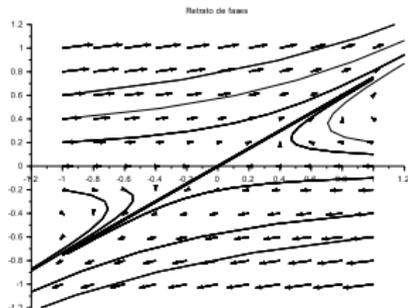


Figura: Diagrama de fases transladados para $(0,0)$ para (a) o ponto de sela $(2,1)$; (b) nó $(-2,1)$.

Método

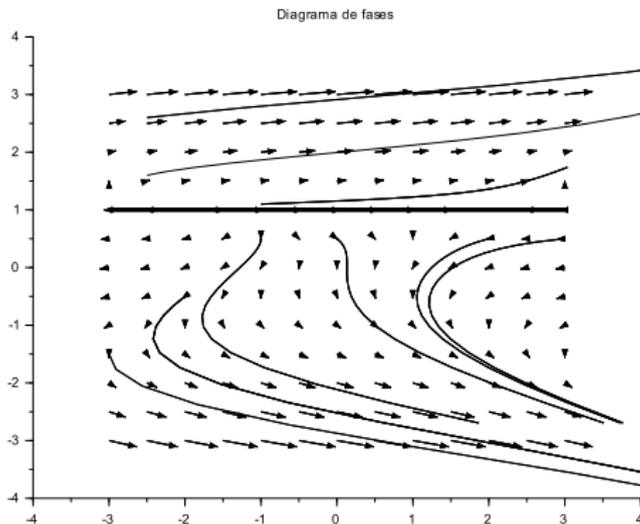


Figura: Retrato de fases para sistema não-linear



Análise

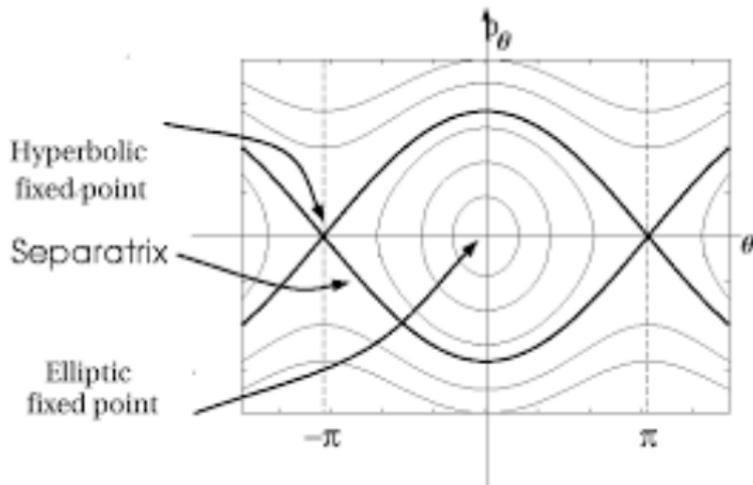


Figura: Retrato de fases para sistema não-linear

Etapas



- Os pontos de equilíbrio devem ser encontrados.
- Faz-se o processo de linearização em torno destes pontos.
- Transladam-se as variáveis para o ponto $(0,0)$
- Realiza-se a análise geométrica para os pontos de equilíbrio segundo a biblioteca de pontos.
- Retornam-se os pontos para os locais originais e somam-se os diagramas de fases

Bibliografia



-  N. Fiedler-Ferrara, C.P. Cintra do Prado, *Caos: uma introdução*, Edgar Blucher, (1994).
-  W.E. Boyce, R.C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, (2015).

Post-mortem



```
// Fazendo a espiral  
x=[0:  $\pi$  /25: 4*  $\pi$  ];  
y=exp(-01.0*x).*sin(x);  
z=exp(-01.0*x).*cos(x);  
plot(y,z)
```

As setas dos pontos de centro podem ser previstas pela matriz A . Se o determinante da matriz A é positivo, as linhas seguem o sentido horário. Se o determinante é negativo, as linhas seguem o sentido anti-horário.