

Diagonalização em equações quadráticas

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA / USP

16 de junho de 2020

Por quê diagonalizamos???

Cônicas: Equações Reduzidas (Equações canônicas)

- Parábola

$$x^2 = 4py$$

- Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{onde } a^2 = b^2 + c^2$$

- Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{onde } c^2 = a^2 + b^2$$

Assíntotas: $y = \pm \frac{b}{a}x$

Diagonalização de matrizes simétricas

Teorema: Todos os autovalores de uma matriz simétrica são números reais.

Teorema: Os auto vetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Teorema: Se A é uma matriz simétrica então existe uma matriz ortogonal P , tal que $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal. Assim:

$$P^t AP = D \iff A = PDP^t$$

Nota: D pode ser construída com os autovalores e P com os autovetores (unitários e ortogonais entre si).

O que vimos, o que vamos ver ...

1. Transformar uma expressão quadrática com termos mistos em expressão sem termos mistos.
2. Representa realizar uma transformação de coordenadas via uma transformação linear.
3. **Hoje:** Se a equação quadrática é completa (tem termos quadrados, lineares e constantes) :
 1. Trabalhar os termos mistos para eliminá-los
 2. Tendo apenas quadrados puros e lineares realizar a completação de quadrados para obter apenas termos com quadrados puros.
 3. Ambos processos é realizar uma transformação afim.

Caso quadrático completo

Considerando uma expressão quadrática completa:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Temos a equação quadrática com parte quadrática, parte linear e parte constante:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Se aplicarmos a diagonalização obtemos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Fazemos a mudança de variável

$$\bar{X} = P^t X$$

Caso quadrático completo

Obtemos:

$$[\bar{x} \quad \bar{y}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + [d \quad e] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Isto é:

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [d \quad e] X + f = 0$$

Mas isto não tem sentido:

Temos duas matrizes variáveis diferentes

Caso quadrático completo

Então, em

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [d \quad e]X + f = 0$$

deve ser transformada também a variável X da parte linear, e isso é possível utilizando a mudança

$$X = P\bar{X}$$

então

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [d \quad e]P\bar{X} + f = 0$$

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [m \quad n]\bar{X} + f = 0$$

Caso quadrático completo

Observar

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [m \quad n] \bar{X} + f = 0$$

$$\bar{X}^t D \bar{X} + \bar{B} \bar{X} + f = 0 \quad \text{com: } \bar{B} = [d \quad e]P.$$

É uma expressão com apenas quadrados puros e termos lineares das incógnitas.

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + m\bar{x} + n\bar{y} + f = 0.$$

Aplicando a completção de quadrados só ficam termos quadrados sem parte linear ou apenas termos lineares de variáveis sem parte quadrática.

Resumo

Dada a equação quadrática

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Diagonalizando com $A = PDP^t$ e mudanças de variáveis $\bar{X} = P^t X$ e $X = P\bar{X}$, temos

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} m & n \end{bmatrix} \bar{X} + f = 0$$

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + m\bar{x} + n\bar{y} + f = 0$$

$$(\lambda_1 \bar{x}^2 + m\bar{x}) + (\lambda_2 \bar{y}^2 + n\bar{y}) + f = 0.$$

Exemplo

Seja a expressão quadrática completa:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0.$$

Diagonalizando a parte quadrática principal, temos a forma quadrática

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy = X^t \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} X$$

Calculando os autovalores e autovetores temos

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy = \bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X}$$

$$\text{onde } \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X \text{ e } X = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{X}.$$

Exemplo (cont)

Substituindo na equação quadrática completa temos:

$$\underbrace{6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0}$$

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} - 20\sqrt{5} [1 \quad 2] \bar{X} = -5$$

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} - 20\sqrt{5} [1 \quad 2] \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{X} = -5$$

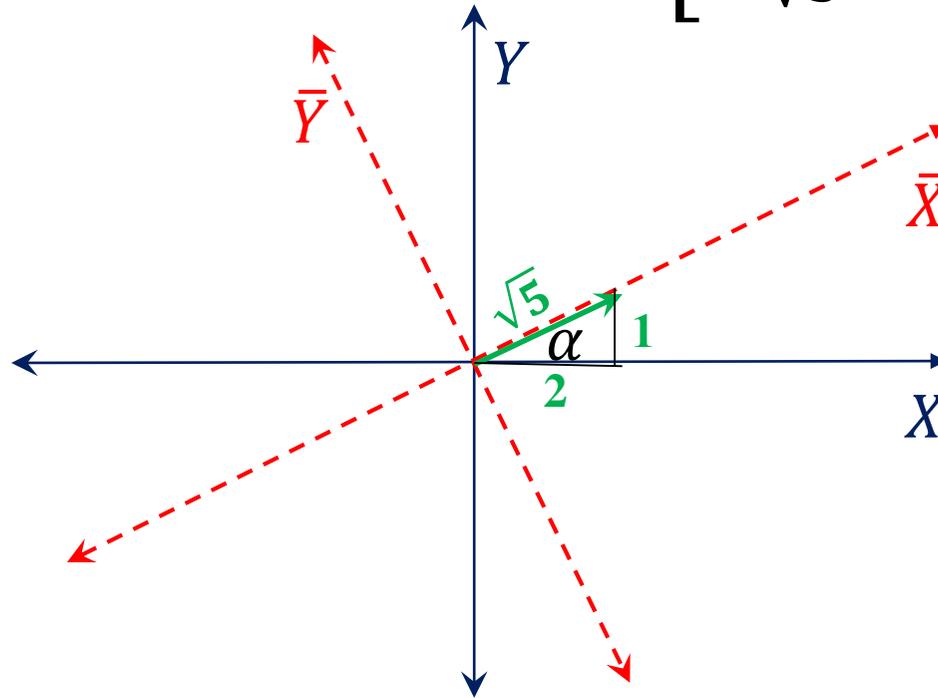
$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} - 20 [4 \quad 3] \bar{X} = -5.$$

Representada como expressão quadrática

$$5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 - 80\bar{x} - 60\bar{y} = -5.$$

Olhando a mudança de variável

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} X$$



Exemplo (cont)

Realizando completção de quadrados em

$$\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 16\bar{x} - 12\bar{y} = -1$$

temos

$$(\bar{x}^2 - 16\bar{x}) + 2(\bar{y}^2 - 6\bar{y}) = -1$$

$$(\bar{x}^2 - 16\bar{x} + 64 - 64) + 2(\bar{y}^2 - 6\bar{y} + 9 - 9) = -1$$

$$(\bar{x} - 8)^2 + 2(\bar{y} - 3)^2 = 81$$

Para simplificar fazemos:

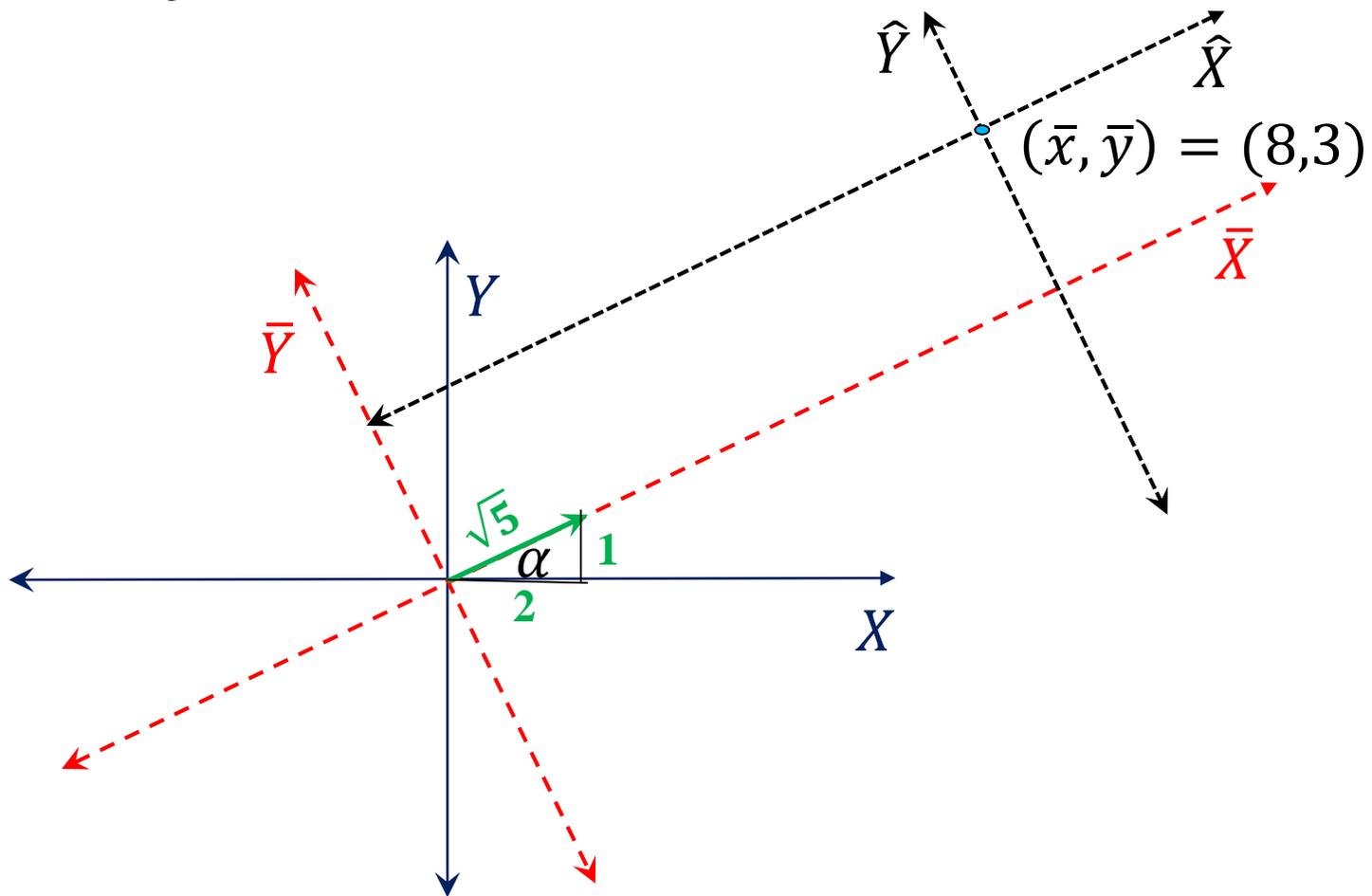
$$\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 = 81$$

Isto é, temos criado uma nova variável

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} - 8 \\ \bar{y} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \bar{X} - C$$

Olhando a mudança de variável

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} - 8 \\ \bar{y} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \bar{X} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Exemplo (cont)

No exemplo, partimos de

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0$$

Primeira mudança de variável: $\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X$

$$\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 16\bar{x} - 12\bar{y} = -1$$

Segunda mudança de variável: $\hat{X} = \bar{X} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 = 81$$

Mudança de variáveis total:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resumo

Em resumo, partindo de

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Utilizando a transformação (primeira mudança)

$$\bar{X} = P^t X$$

Obtemos uma expressão da forma

$$m\bar{x}^2 + n\bar{y}^2 + p\bar{x} + q\bar{y} + r = 0$$

Utilizando a translação (segunda mudança)

$$\hat{X} = \bar{X} - C$$

Obtemos uma expressão **(se possível)**

$$M\hat{x}^2 + N\hat{y}^2 + R = 0$$

Resumo

Juntando as mudanças de variáveis realizadas temos

$$\hat{X} = \bar{X} - C = P^t X - C$$

Isto representa uma transformação afim:

$$\hat{X} = T(X) = P^t X - C.$$

O caminho inverso é válido, fazemos

$$P^t X = \hat{X} + C$$

$$X = P(\hat{X} + C) = P\hat{X} + PC = P\hat{X} + R.$$

As variáveis se relacionam usando:

$$\hat{X} = P^t X - C \quad \Leftrightarrow \quad X = P\hat{X} + R.$$

Exemplo 3D

Simplifique a expressão quadrática

$$3z^2 + 3y^2 + yz - x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z = 1$$

No formato matricial

$$X^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} X + [-1 \quad 2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2}]X = 1$$

Precisamos diagonalizar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3D

Diagonalizando a forma quadrática, temos

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{7}{2} \quad \lambda_3 = \frac{5}{2}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A forma sem termos mistos é

$$\frac{7}{2} \bar{y}^2 + \frac{5}{2} \bar{z}^2 - \bar{x} - 4\bar{z} = 1$$

Exemplo 3D

$$7\bar{y}^2 + 5\bar{z}^2 - 2\bar{x} - 8\bar{z} = 2$$

Complementando

$$7\bar{y}^2 + 5\left(\bar{z}^2 - \frac{8}{5}\bar{z}\right) - 2\bar{x} = 2$$

$$7\bar{y}^2 + 5\left(\bar{z}^2 - \frac{8}{5}\bar{z} + \frac{16}{25} - \frac{16}{25}\right) - 2\bar{x} = 2$$

$$7\bar{y}^2 + 5\left(\bar{z} - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{5} - 2\bar{x} = 2$$

$$7\hat{y}^2 + 5\hat{z}^2 - 2\hat{x} = \frac{26}{5}.$$

Observar uma variável ficou linear não quadrática.