Autovalores e autovetores de uma matriz

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA / USP

9 de junho de 2020

Autovalor e autovetor de uma matriz

Valor próprio de uma matriz:

Dada uma matriz A, um número escalar λ é **valor próprio** de A **(autovalor** de A**),** se existe um vetor não nulo X que satisfaz:

$$AX = \lambda X$$

O vetor não nulo X correspondente ao autovalor λ é denominado de **vetor próprio** de A (**autovetor** de A)

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 1: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observar que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = 3X$$

para $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, pois

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim $\lambda = 3$ é autovalor de A e $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é autovetor.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 1: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Mas, se $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e supondo que existe algum escalar α que satisfaz

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então: $5 = \alpha 2 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$, e do outro $4 = \alpha$.

Não pode assumir dois valores diferentes, não existe.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 1: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observar, se utilizarmos: $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então $\lambda = 3$ é autovalor de A e $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é autovetor.

Cuidado! Não pode fazer $\lambda = 6$ um autovalor de A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 1: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, se utilizarmos: $X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Então $\lambda = 3$ é autovalor de A e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A.

Logo, são autovetores todos os paralelos (múltiplos) de um autovetor encontrado.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 2: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Agora, se utilizarmos: $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então $\lambda = -3$ é autovalor de A e $[-1 \quad 1 \quad 0]^t$ é autovetor (e todos seus múltiplos).

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 2: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Mas se utilizarmos: $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então $\lambda = -3$ é autovalor de A e $[-2 \quad 0 \quad 1]^t$ é autovetor (e todos seus múltiplos).

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 2: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Também

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} \left(\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \alpha A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta A \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 \left(\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 2: Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Assim, o autovalor $\lambda = -3$ tem dois autovetores não paralelos (LI) (Dizemos que $\lambda = -3$ é um autovalor de multiplicidade dois).

O conjunto de todos os autovetores de $\lambda = -3$ é

$$\left\{ \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;/\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Autovalor e autovetor de uma matriz

Dada uma matriz $A_{n\times n}$.

Se λ é um autovalor de A, e se $X_1, X_2, \ldots, X_r$ são autovetores linearmente independentes de λ, então o conjunto de todos os autovetores $\{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_r X_r \ / \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$

é chamado de **autoespaço do autovalor** λ de A.

Problema: Como determinar os autovalores e os autovetores.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Sabemos que se λ é um autovalor de A, e se X é um autovetor de A, então

$$AX = \lambda X$$

Isso significa: $$AX - \lambda X = 0$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

onde X é uma solução não trivial ($X \neq 0$) dessa equação matricial (sistema homogêneo).

NOTA: Já sabemos que $X = 0$ é solução, mas para ser autovetor deve ser não nulo.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Por outro lado, se A é de ordem $n \times n$ então em

$$AX = \lambda X \quad \text{ou} \quad (A - \lambda I)X = 0$$

temos um sistema de n equações, mas com $(n + 1)$ incógnitas (as n componentes de X mais λ).

Precisamos de mais uma equação.

Lembrando que o sistema homogêneo acima tem solução não trivial (propriedades do determinante de um sistema homogêneo) se e somente se o determinante da matriz do sistema é zero:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Autovalor e autovetor de uma matriz

Assim temos $(n+1)$ equações também.

Mais ainda, podemos resolver primeiro a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

que considera apenas uma incógnita.

Depois podemos resolver o sistema

$$(A - \lambda I)X = 0$$

com as n equações para calcular a solução não trivial $(X \neq 0)$, pois λ já foi determinada.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Já temos um processo bem determinado:

1. Calcular os autovalores (se existirem) da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

2. Para cada autovalor encontrado, calculamos o(s) autovetor(es) correspondente(s), da equação

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Nota: No passo 2. pode dar só solução trivial, então o λ não é autovalor. Portanto, os valores obtidos no passo 1., fornece apenas candidatos a autovalores. Só com solução não trivial em 2. temos autovalores

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 3: Consideremos o exemplo 1.

Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Primeiro calculamos os (candidatos a) autovalores:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 3: Calculando o determinante, temos

$$(2-\lambda)(2-\lambda)-1=0$$

Observar que o lado esquerdo é um polinômio de grau dois.

Daqui

$$4-4\lambda+\lambda^2-1=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$$

Soluções: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. (Dois candidatos).

Já sabiamos que 3 é autovalor.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 3: Agora sabemos que A tem outro candidato a autovalor $\lambda_2 = 1$. Qual o autovetor?

2. Para calculá-lo utilizamos: $(A - \lambda_2 I)X = 0$, isto é, basta resolver

$$(A - I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Por Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Autovalor e autovetor de uma matriz

Exemplo 3: Para o autovalor $\lambda_2 = 1$, o autovetor tem a forma $X_2 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Concluimos: A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ tem o autovalor $\lambda_2 = 1$ com autovetor $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e autoespaço

$S_2 = \left\{\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \;/\; \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ com base $\beta_2 = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Autovalor $\lambda_1 = 3$, autovetor $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e autoespaço $S_1 = \left\{\delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;/\; \delta \in \mathbb{R}\right\}$ com base $\beta_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Para a matriz $A_{n\times n}$, el polinômio

$$\det(A-\lambda I)$$

que es de grau n, é chamado de **polinômio característico** da matriz A.

La equação

$$\det(A-\lambda I)=0$$

é chamada de **equação característica.**

Assim, a equação característica possibilita determinar os autovalores da matriz A.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Autovetores unitários

Dado que para cada autovetor de um autovalor, todo vetor múltiplo dele é também autovetor, então recomendo utilizar o autovetor unitário, como elemento da base do autoespaço.

No exemplo, utilizariamos

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de matrizes simétricas

Teorema: Todos os autovalores de uma matriz simétrica são números reais.

Teorema: Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Definição: Uma matriz P, não singular é chamada de **matriz ortogonal** se $P^{-1} = P^t$.

Teorema: Uma matriz P é **ortogonal** se e somente se suas colunas formam um conjunto ortonormal (ortogonais e unitários).

Autovalores de matrizes simétricas

Seja $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ uma matriz ortogonal ($P^{-1} = P^t$),
seus vetores coluna são $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

Por ser ortogonal, fazemos: $P^t P = I$

Então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Daqui: $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$

então são vetores coluna unitários.

Também $ac + bd = 0 \Rightarrow (a, b) \cdot (c, d) = 0$

então são vetores ortogonais.

Autovalores de matrizes simétricas

Do exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$ são reais.

Os autovetores são $X_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ são

ortogonais.

Podemos montar uma matriz ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Autovalores de matrizes simétricas

Observar: Se além de montar a matriz P (é não singular, pois existe a transposta e $P^{-1} = P^{t}$), montamos também a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando temos

$$PDP^{t} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$PDP^{t} = \begin{bmatrix} 3\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Autovalores de matrizes simétricas

Já sabiamos que: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são congruentes. E agora temos: $A = PDP^t$.

Temos **a técnica** para construir matrizes congruentes entre uma matriz simétrica e uma diagonal.

A **diagonalização** da matriz A é o processo de encontrar uma matriz diagonal D e outra matriz não singular P, que satisfaz $A = PDP^t$.

Isto é, determinar uma diagonal D congruente com A

Autovalores de matrizes simétricas

A **técnica** para construir uma matriz diagonal D congruente a uma matriz simétrica A, considera:

1. A matriz diagonal D é formada pelos autovalores da matriz A.
2. A matriz P é construida formando suas colunas sendo os autovetores unitários e ortogonais de A.

Nota: Os autovetores serão colunas ortogonais desde que os autovalores sejam diferentes. Se os autovalo-res são iguais, utilizar o processo de Gram-Schmidt.

Algumas observações

Na definição as matrizes A e B são congruentes se existe uma matriz não singular que: $A = P^t BP$.

Observar: Se P é ortogonal, temos

$$A = P^t BP$$

multiplicando pela esquerda vezes P e pela direita vezes P^t

$$PAP^t = PP^t BPP^t$$

Como $P^t = P^{-1}$, então

$$PAP^t = B.$$

Autovalores de matrizes simétricas

Exemplo 4: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

1. Autovalores:

Resolvemos: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

polinômio característico:

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(9-\lambda) - 16(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)[(3-\lambda)(9-\lambda) - 16] = 0$$

Autovalores de matrizes simétricas

Exemplo 4:

Fatore (coloque em evidência) sempre que puder

$$(2-\lambda)[\lambda^2 - 12\lambda + 11] = 0$$

assim, não precisa aplicar Ruffini. Então, temos

$$(2-\lambda)(\lambda - 11)(\lambda - 1) = 0$$

Candidatos a autovalores:

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 11$$
$$\lambda_3 = 1.$$

Autovalores de matrizes simétricas

Exemplo 4: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Autovetores: Deve ser feito para cada λ. Resolver

$$(A - \lambda I)X = 0$$

2.1. Para $\lambda_1 = 2$

Resolvemos:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2 & 4 \\ 0 & 4 & 9-2 \end{bmatrix} X = 0$$

Autovalores de matrizes simétricas

Exemplo 4: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} X = 0$$

Obtemos a solução não trivial

$$X_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Autovalores de matrizes simétricas

Exemplo 4: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

2.2. Para $\lambda_2 = 11$. Obtemos a solução não trivial

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sqrt{5}s \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

2.3. Para $\lambda_3 = 1$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \sqrt{5}t \begin{bmatrix} 0 \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Autovalores de matrizes simétricas

Exemplo 4: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Montamos as matrizes de autovalores e autovetores unitários:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 2\frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

O trabalho não é apenas para matrizes simétricas.

Exemplo 5: Voltando para a matriz do exemplo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

1. Autovalores: Resolver $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 & 16 \\ 4 & 1-\lambda & 8 \\ -4 & -4 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

O determinante dá

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2 = 0$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

Obtemos os valores (candidatos a autovalores)

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -3$$

2. Autovetores: Resolver $(A - \lambda I)X = 0$

2.1 Para $\lambda_1 = 1$ encontramos

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Para $\lambda_2 = -3$ encontramos

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

No segundo autovalor $\lambda_2 = -3$

O sistema é a resolver $(A - \lambda I)X = 0$ fica:

$$\begin{bmatrix} 5+3 & 8 & 16 \\ 4 & 1+3 & 8 \\ -4 & -4 & -11+3 \end{bmatrix} X = 0$$

Matriz estendida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

Percebe-se que duas linhas serão zeradas, dai a probabilidade de se ter dois autovetores.

Autovalores e autovetores de uma matriz

Exemplo 6.

Calcule os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Utilize seus conhecimentos de fatoração da álgebra básica. A solução é

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = 3.$$

Sugiro: https://matrixcalc.org/pt/ para o cálculo de autovalores utilize a opção "Decomposição de Jordan"