Processo de Ortogonalização Gram Schmidt

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

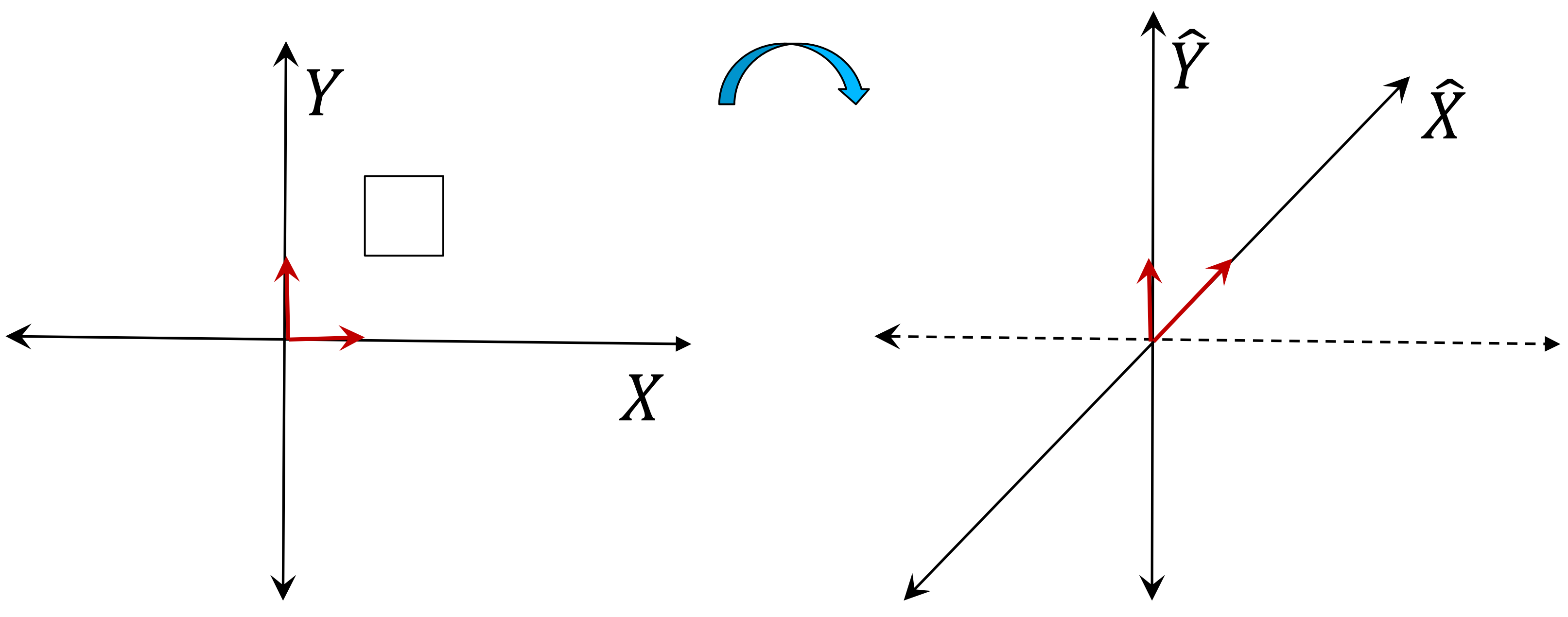
3 de junho de 2020

Problema anterior

Supondo ser necessário utilizar uma $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, e

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(0,1)\}$$

onde o eixo $\hat{X}$ deve ser a reta diagonal. Então, $\hat{Y}$ não precisa ser vertical, pode ser uma ortogonal a $\hat{X}$.

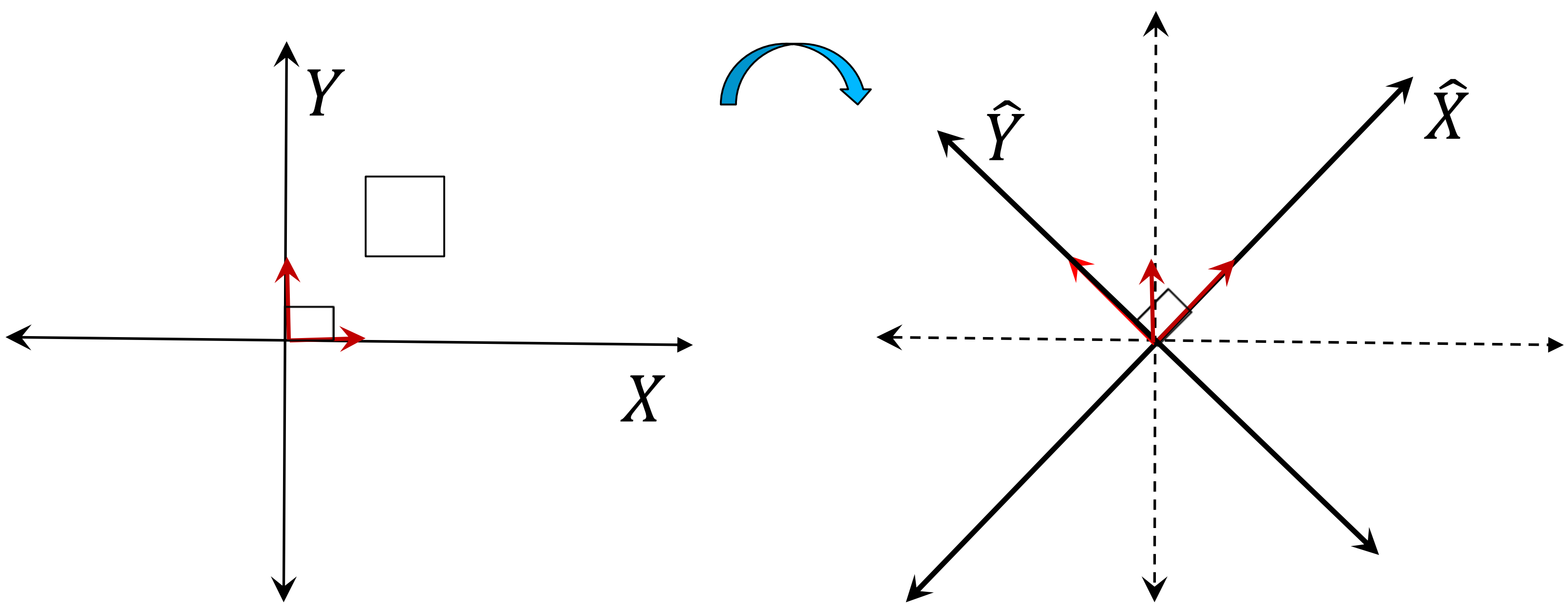


Problema anterior

Então podemos considerar as bases

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1),(-1,1)\}$$

dessa forma os eixos são ortogonais. A construção do vetor ortogonal **é muito simples** em $\mathbb{R}^2$

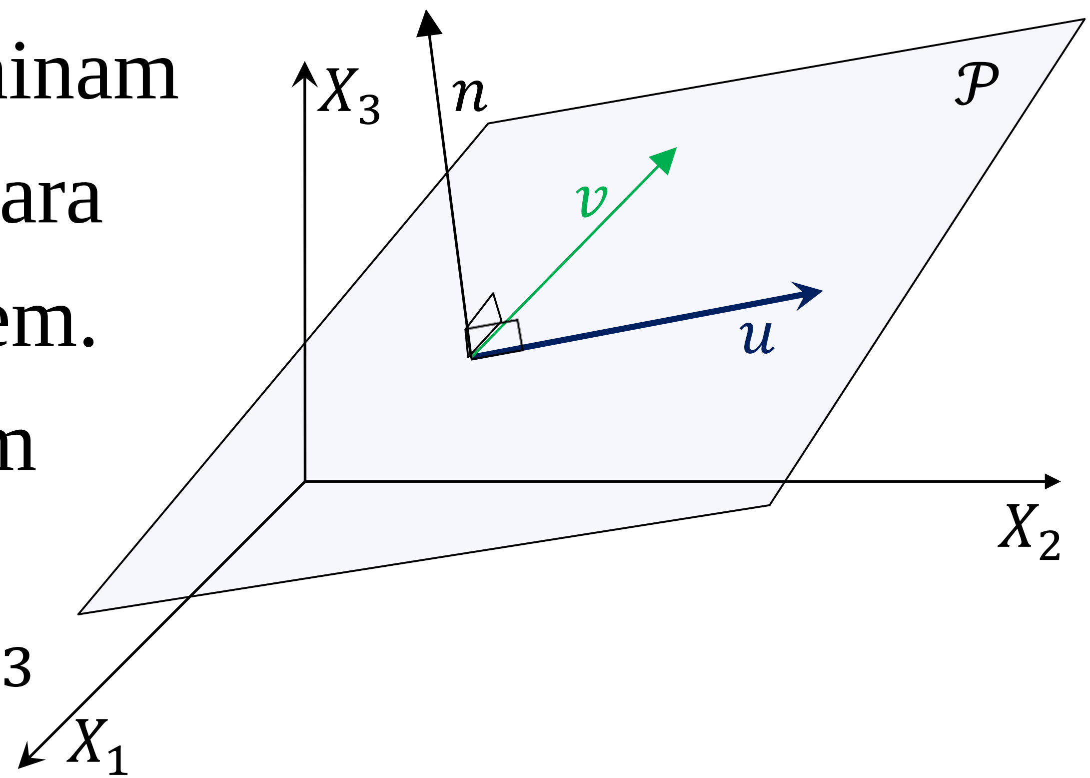


Ortogonalizar em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$ não é tão facil assim.

Dados vetores não nulos e não paralelos $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Sabemos que determinam um único plano $\mathcal{P}$, para um ponto de passagem.



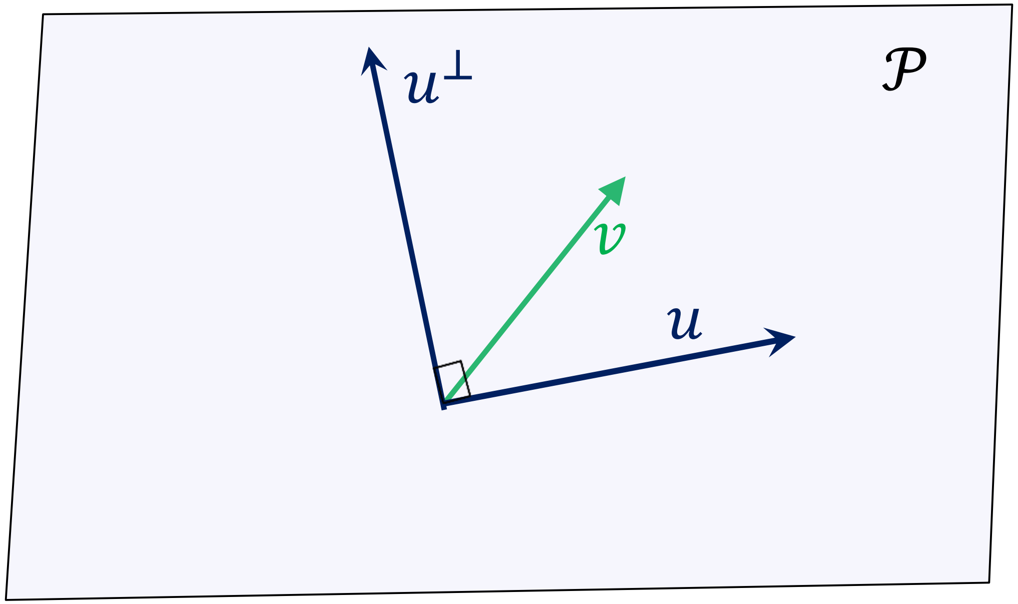
Sabemos que existem infinitos vetores ortogonais a u em $\mathbb{R}^3$

Procuramos um vetor ortogonal a u mas no plano $\mathcal{P}$.

Ortogonalizar em $\mathbb{R}^3$

Resgatamos o plano $\mathcal{P}$.

No plano podemos girar o vetor u um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ graus, obtendo o vetor chamado de $u_{\mathcal{P}}^{\perp}$, ou simplesmente de $u^{\perp}$ (no plano é único).



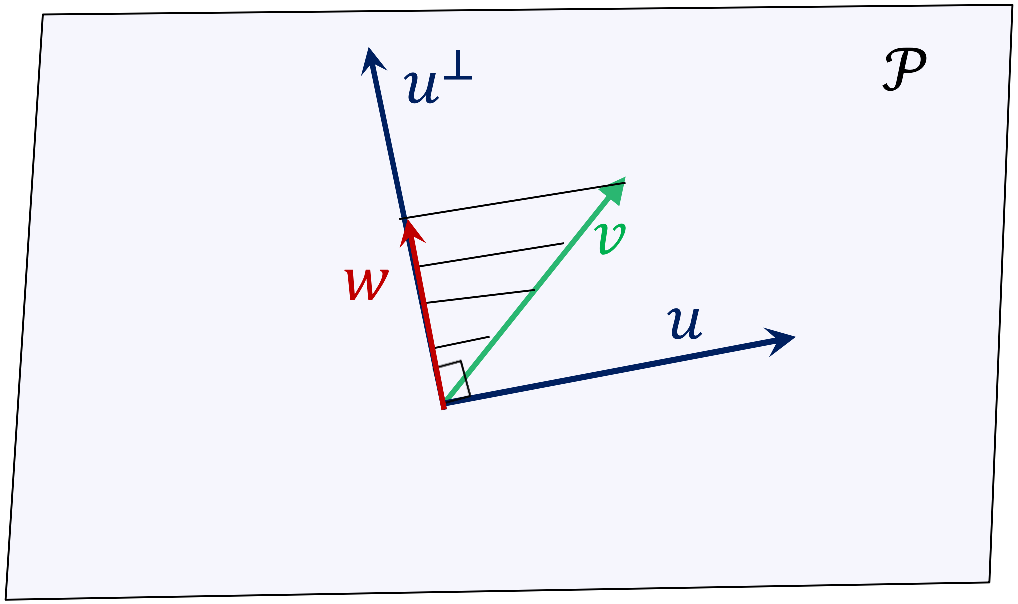
Nesse caso, apenas precissamos de u, sem interessar o tamanho de v.

Mas, o vetor v tem importância no problema.

Ortogonalizar em $\mathbb{R}^3$

A ideia é ortogonalizar u no plano $\mathcal{P}$, **mas não qualquer ortogonal**.

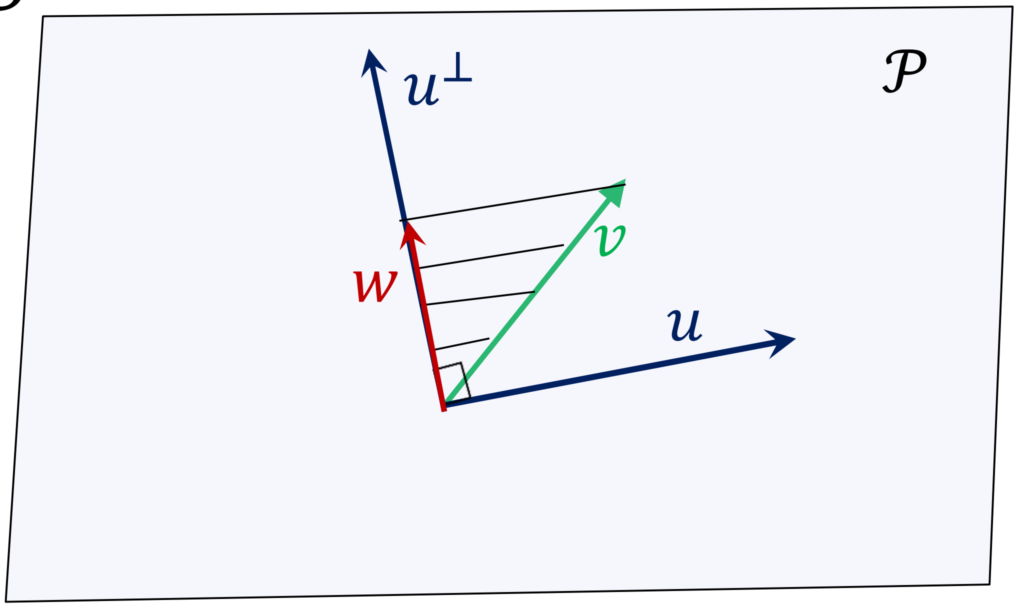
Queremos **preservar informação de $\boldsymbol{v}$**, portanto uma ideia é conseguir um vetor que seja a projeção ortogonal de v sobre o vetor $u^{\perp}$ no plano. Vetor vermelho: w.



Ortogonalizar em $\mathbb{R}^3$

Sempre podemos ortogonalizar u ???

- Precisamos de u e v não nulos, caso contrário não determinam um plano $\mathcal{P}$
- Também $u \nparallel v$, pois se são paralelos estão em uma reta e não determinam um plano único.



- Verificar que não sejam ortogonais !!!

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 2 vetores.

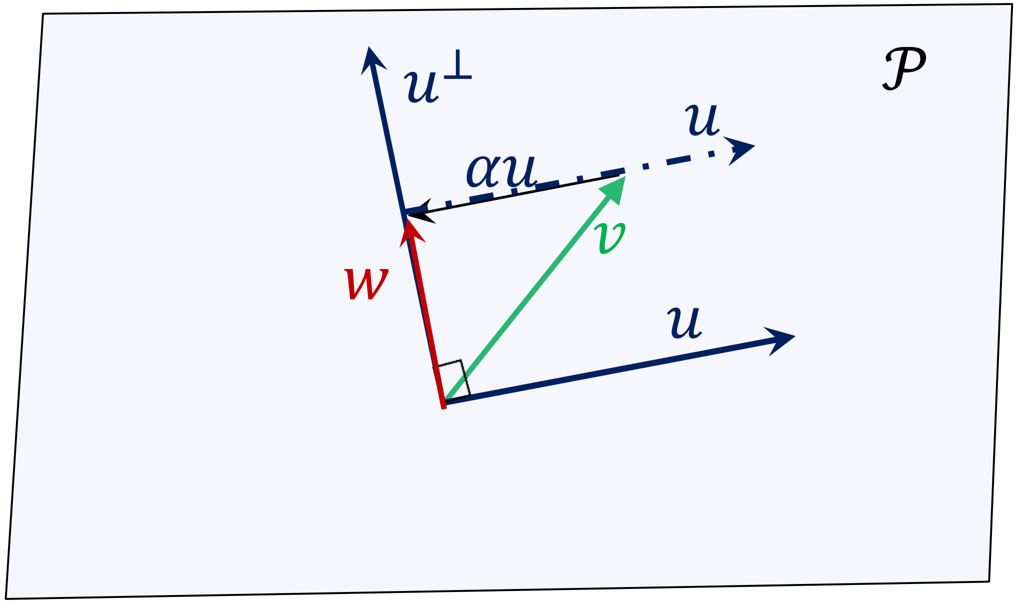
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

Assim, u e v são os vetores de um plano único $\mathcal{P}$.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt construe um vetor

$$w = v + \alpha u$$

que satisfaz $w \perp u$.



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 2 vetores.

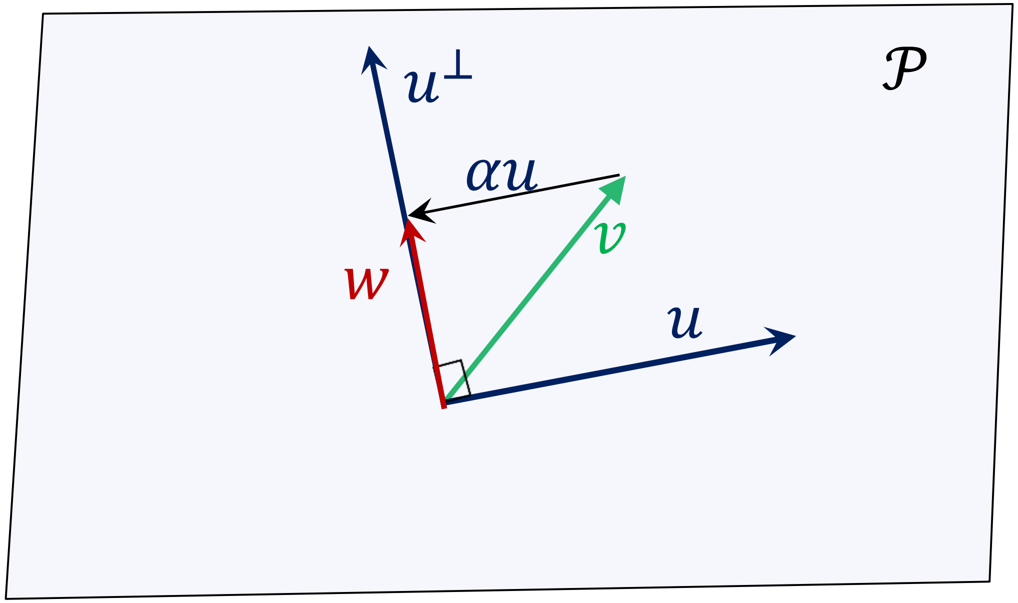
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

construe um vetor

$w = v + \alpha u$

que satisfaz $w \perp u$.



Observar:

O vetor $w \in \mathcal{P}$, pois

u e v saõ os vetores de direção que geram o plano $\mathcal{P}$.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 2 vetores.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

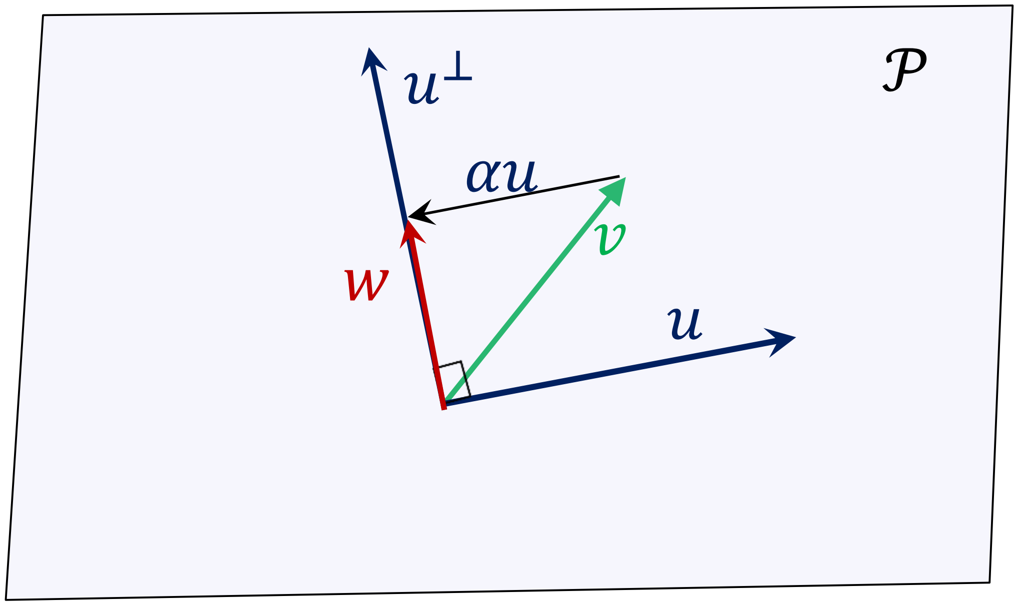
agora faz o produto

ponto vezes u,

$$w \cdot u = v \cdot u + \alpha u \cdot u$$

como $w \cdot u = 0$, temos

$$0 = v \cdot u + \alpha u \cdot u$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 2 vetores.

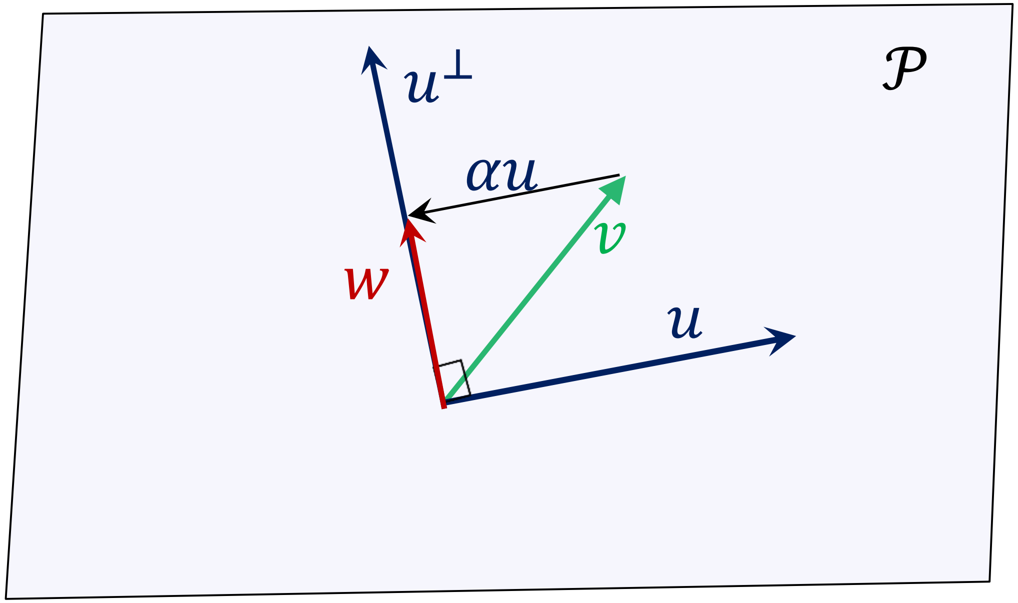
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

permite determinar α

$$0 = v \cdot u + \alpha \|u\|^2$$

$$\alpha = -\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}.$$



Portanto,

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}\right) u$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 2 vetores.

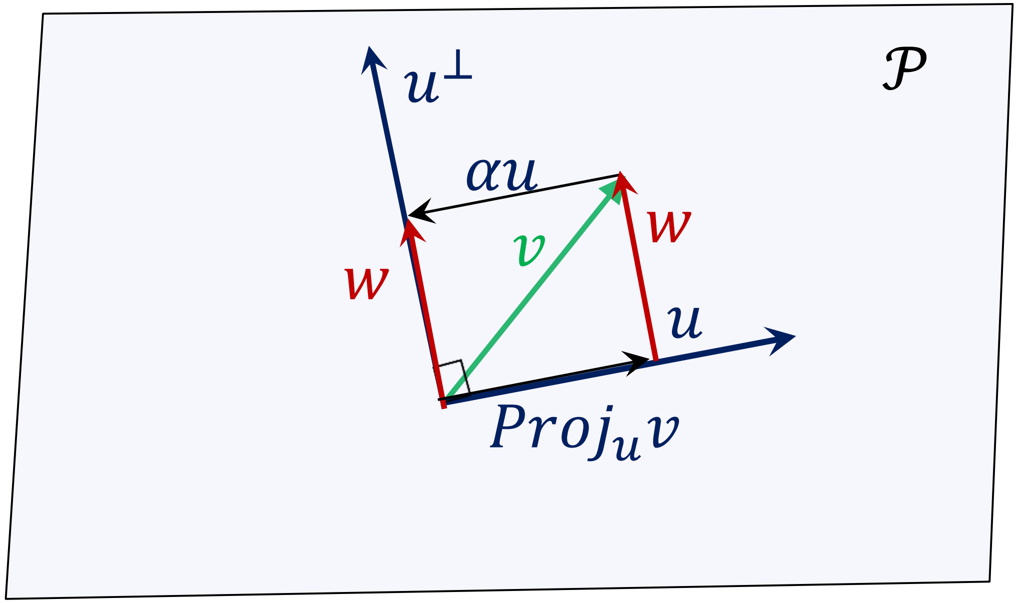
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

determinou o vetor

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}\right) u$$

que satisfaz $w \perp u$.



Observar que o vetor

αu é o vetor projeção

de v sobre u com sinal negativo: $\boldsymbol{w = v - Proj_u v}$

Ortogonalização de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^2$

Então em $\mathbb{R}^2$, podemos também aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, o qual constroi um vetor ortogonal mas sem desconsiderar o vetor (0,1).

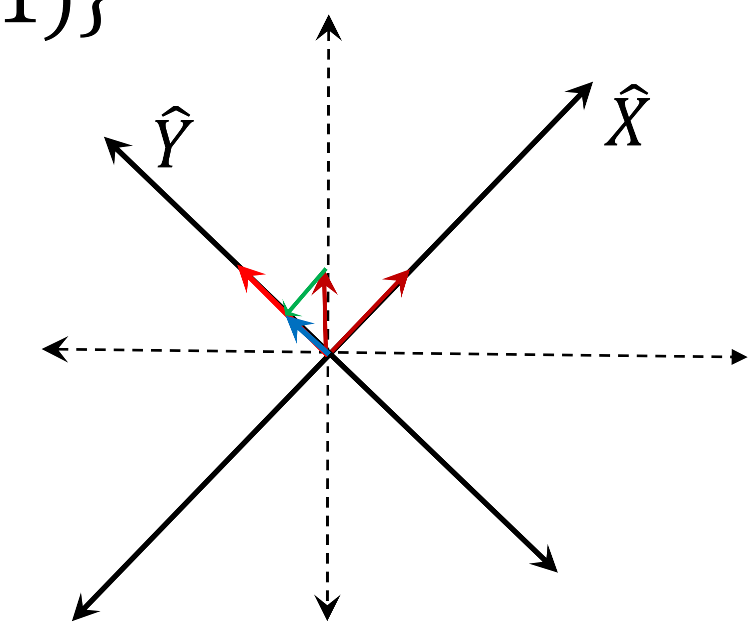
Então desde $\delta = \{(1,1), (0,1)\}$

temos $w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}\right) u$

$v \cdot u = 1, \|u\|^2 = 2$

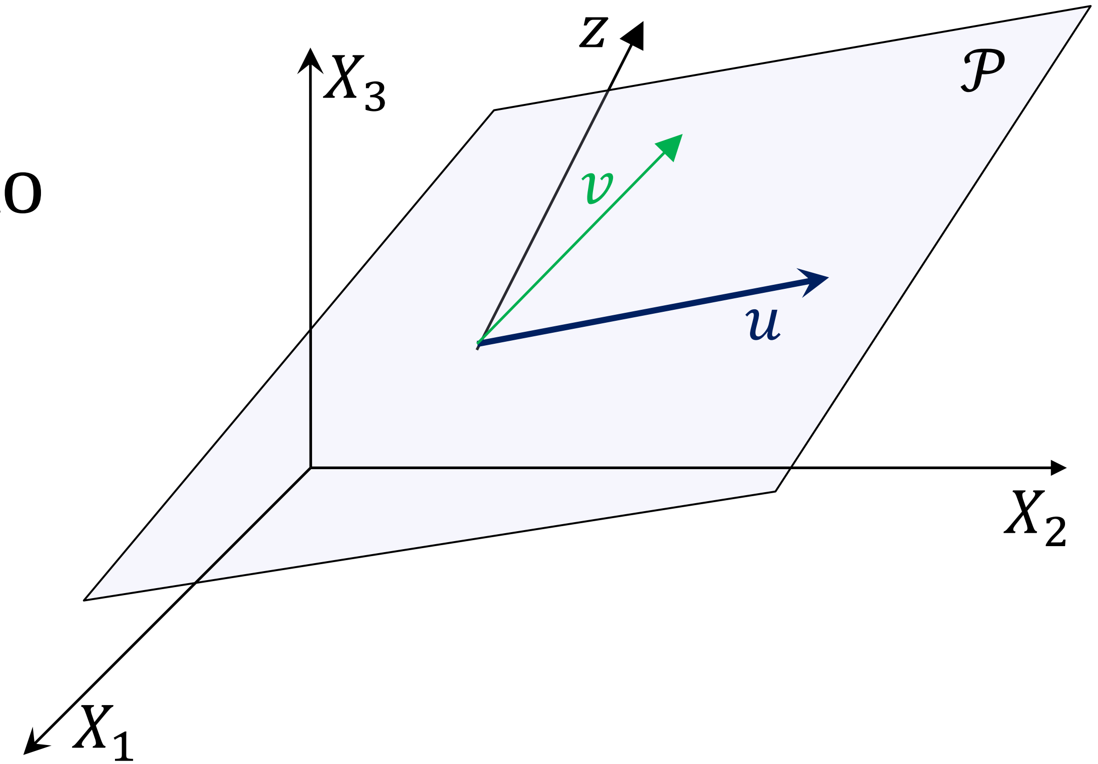
$w = (0,1) - \frac{1}{2}(1,1)$

$w = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1,1).$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Em $\mathbb{R}^3$, podem ter sido fornecidos três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

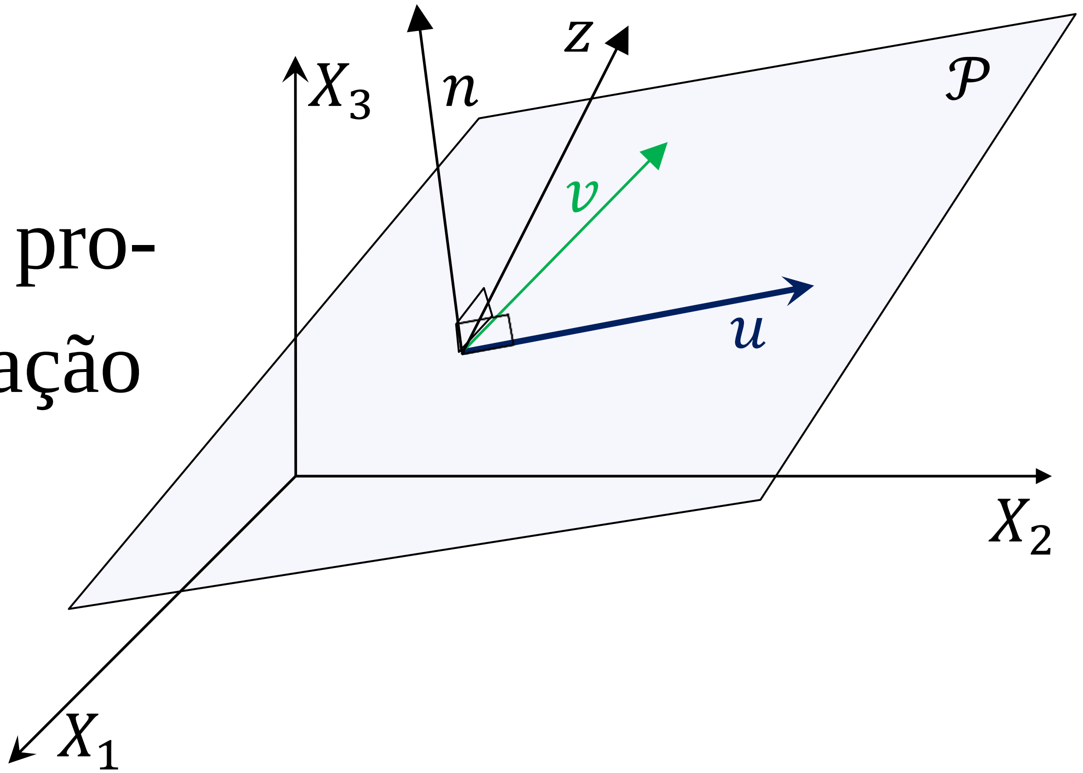


Supomos que não são ortogonais entre si, caso contrário não precisa ser realizada atividade nenhuma, ou ortogonalizar apenas dois vetores.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

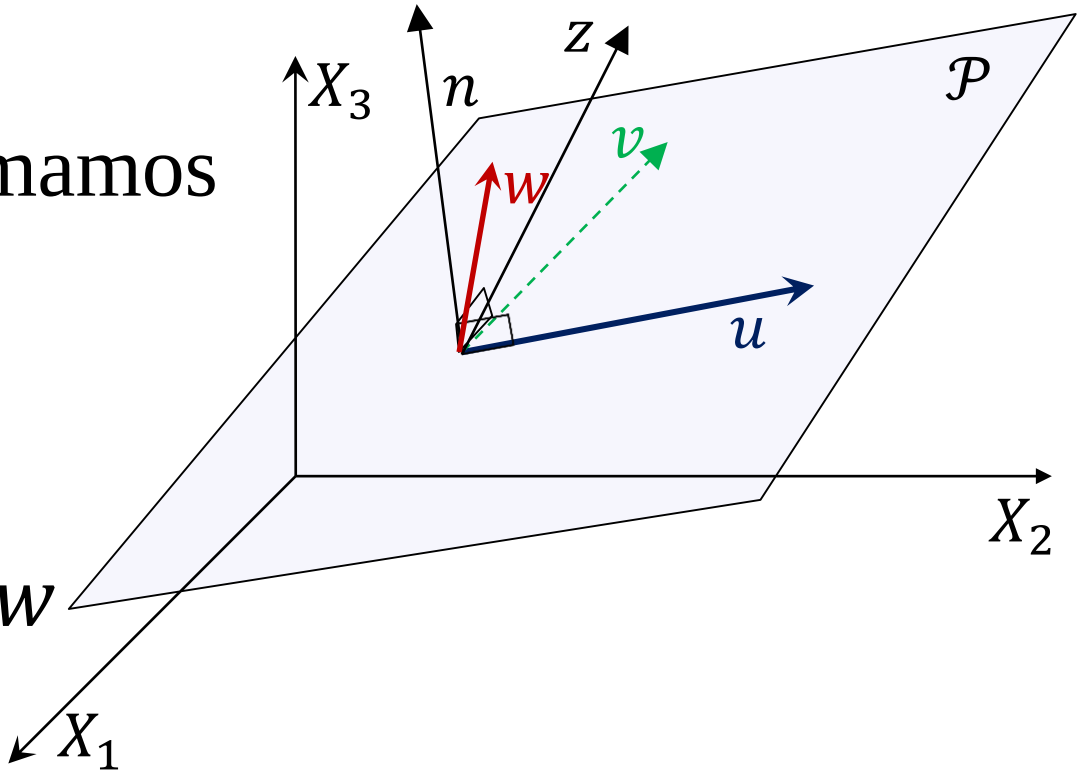
Para u e v podemos formar $w \perp u$ com o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt no plano $\mathcal{P}$.



Sempre pode formar n, vetor ortogonal ao plano $\mathcal{P}$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.



Utilizando u e v formamos

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}\right) u$$

e $w \perp u$ e $w \in \mathcal{P}$.

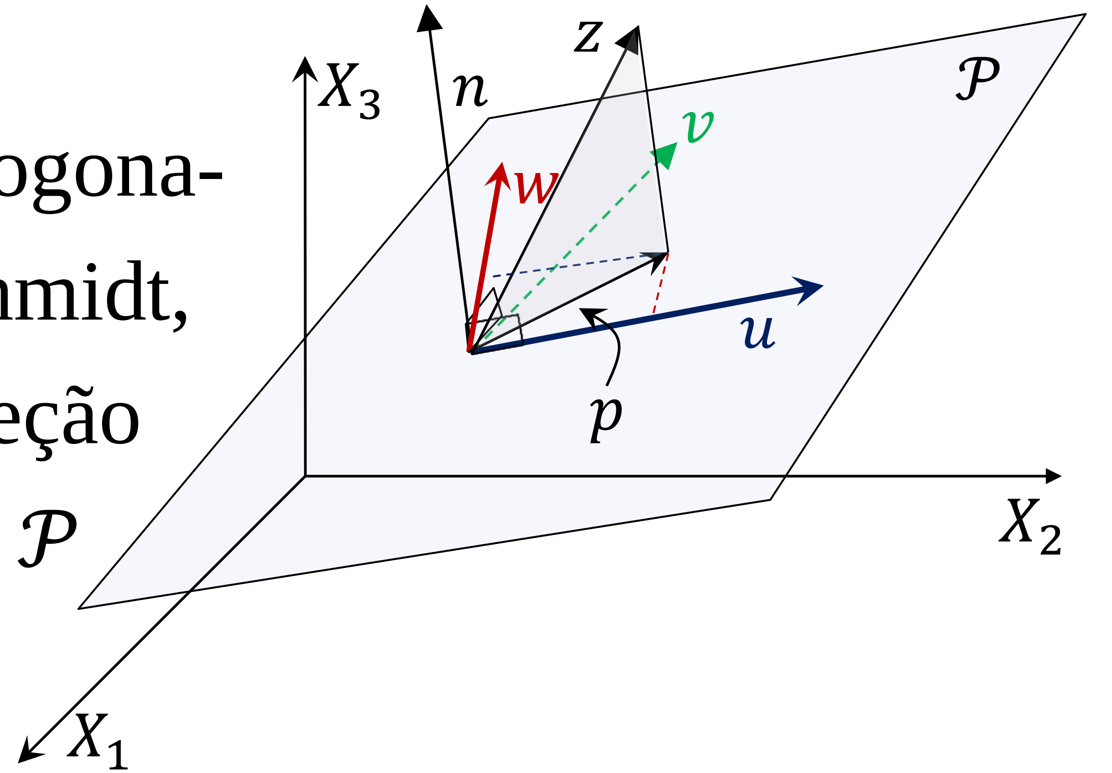
Substituimos v pelo w

Usando z, procuramos um vetor ortogonal ao $\mathcal{P}$.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, consideramos a projeção ortogonal de z sobre $\mathcal{P}$



Chamaremos de p

e esse vetor é combinação linear de u e w.

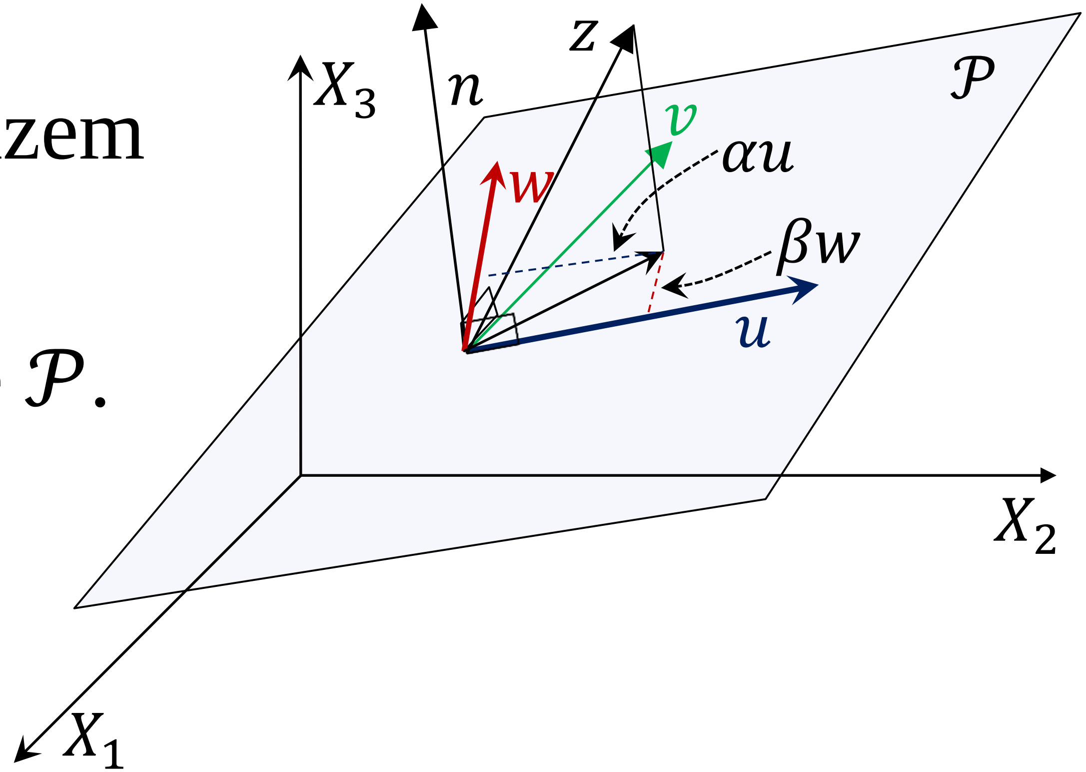
Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Existem α e β que fazem

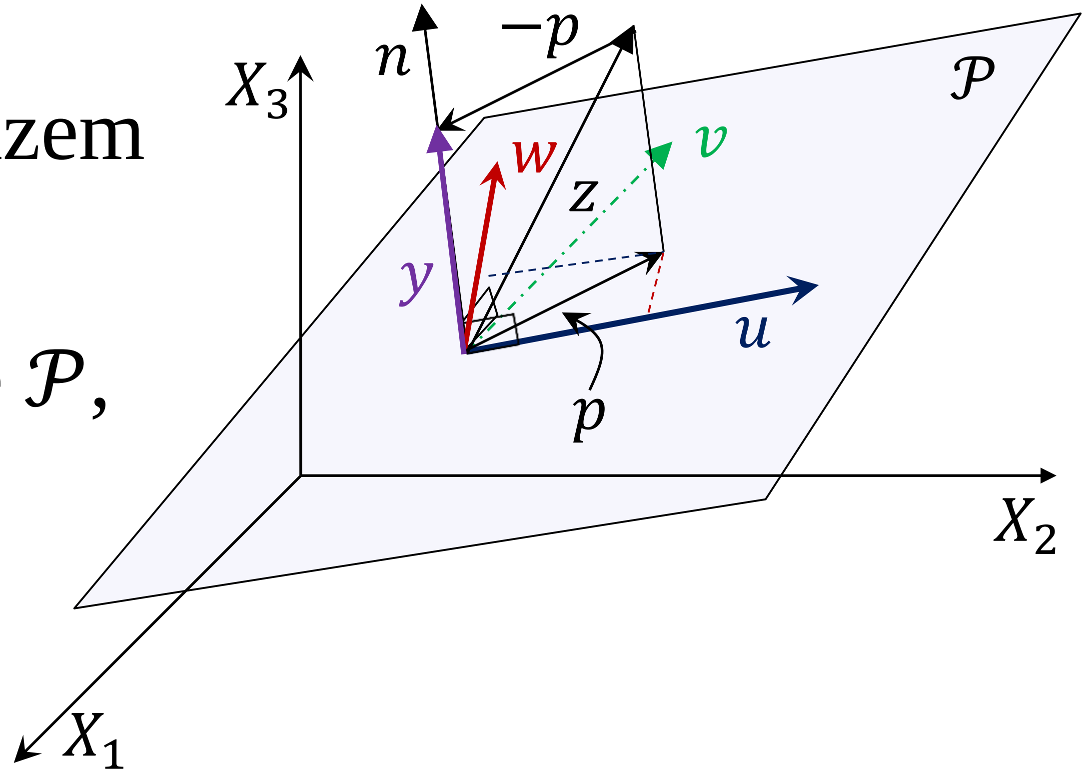
$p = \alpha u + \beta w$

pois é projeção sobre $\mathcal{P}$.



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.



Existem α e β que fazem

$$p = \alpha u + \beta w$$

pois é projeção sobre $\mathcal{P}$,

e construimos um

vetor y paralelo a n,

$$y = z - p$$

$$y = z - \alpha u - \beta w$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

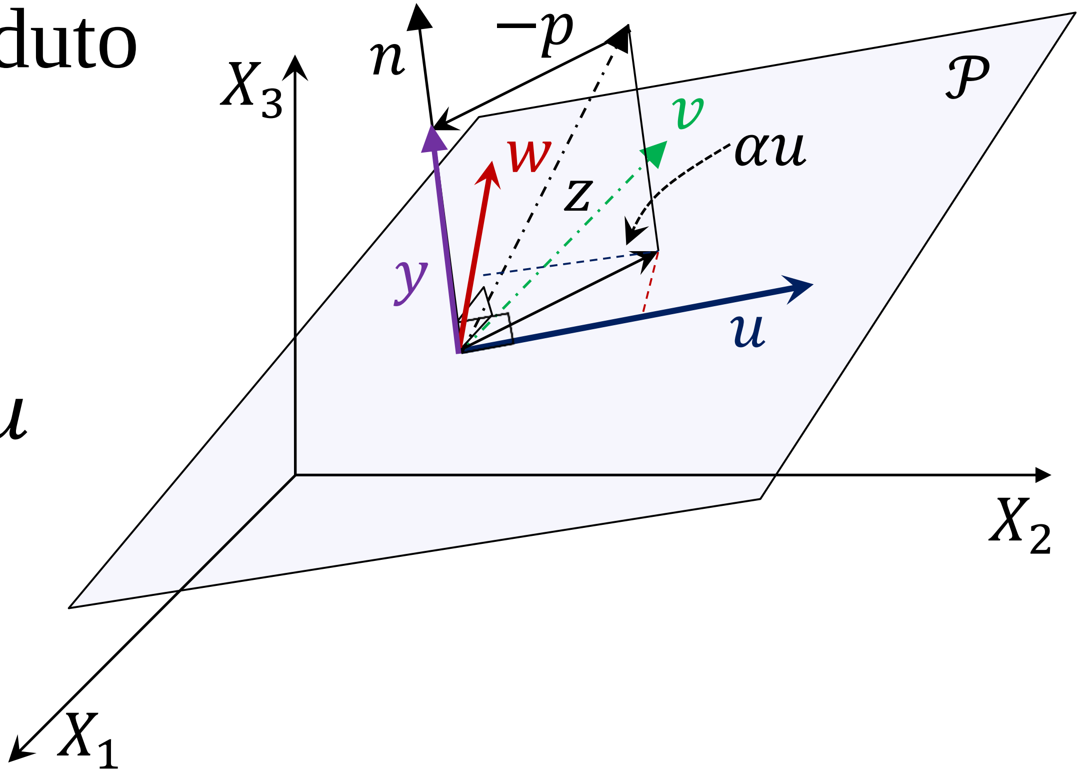
Obtemos: $y \cdot u = z \cdot u - \alpha u \cdot u - \beta w \cdot u$

multiplicando produto ponto vezes u.

Então

$$0 = z \cdot u - \alpha u \cdot u$$

$$\alpha = \frac{z \cdot u}{\|u\|^2}$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

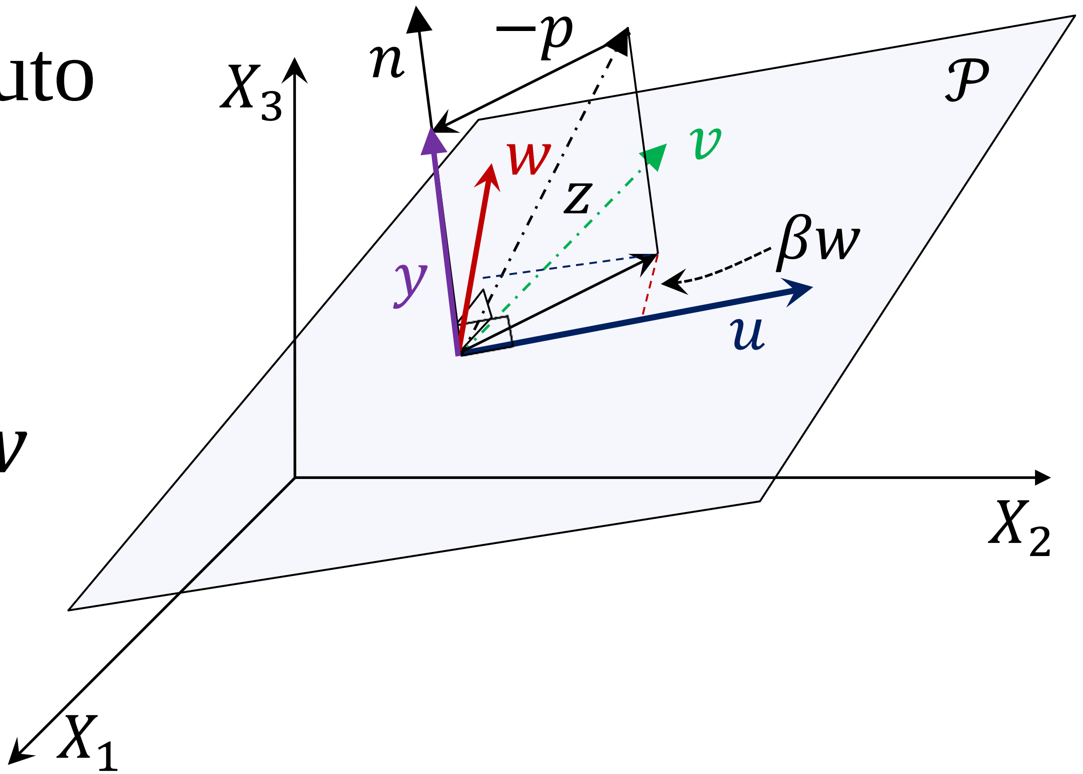
Obtemos: $y \cdot w = z \cdot w - \alpha u \cdot w - \beta w \cdot w$

multiplicando produto ponto vezes w.

Então

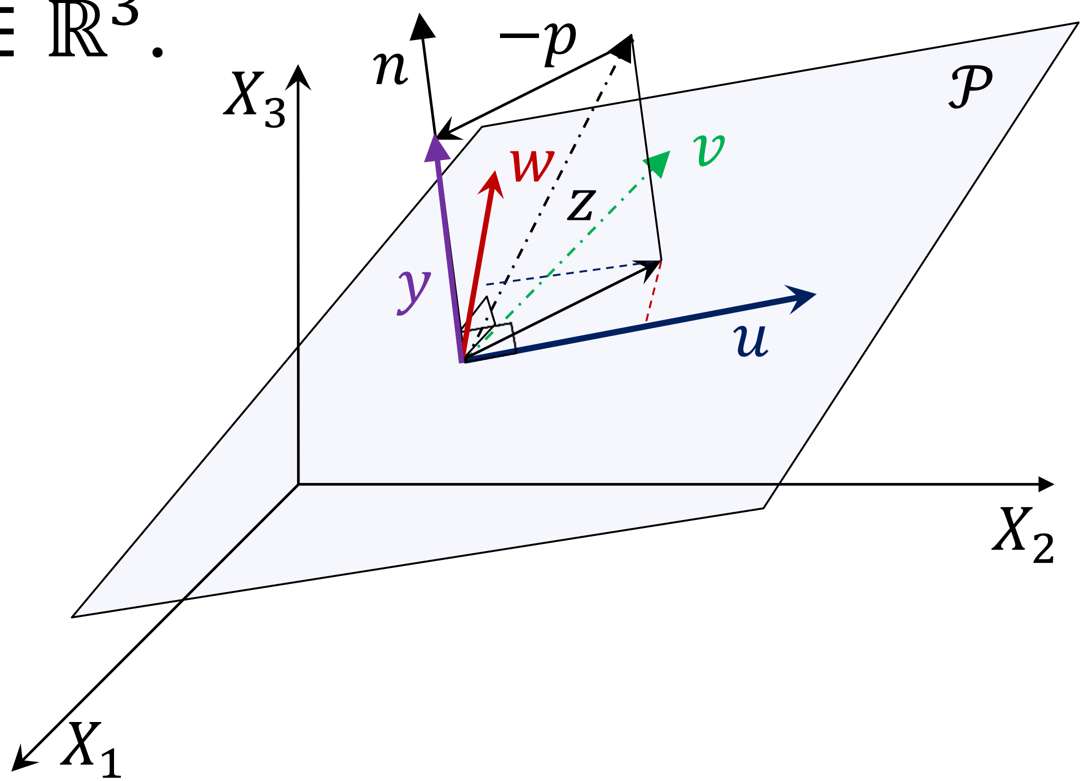
$$0 = z \cdot w - \beta w \cdot w$$

$$\beta = \frac{z \cdot w}{\|w\|^2}$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.



Assim, de

$$y = z - \alpha u - \beta w$$

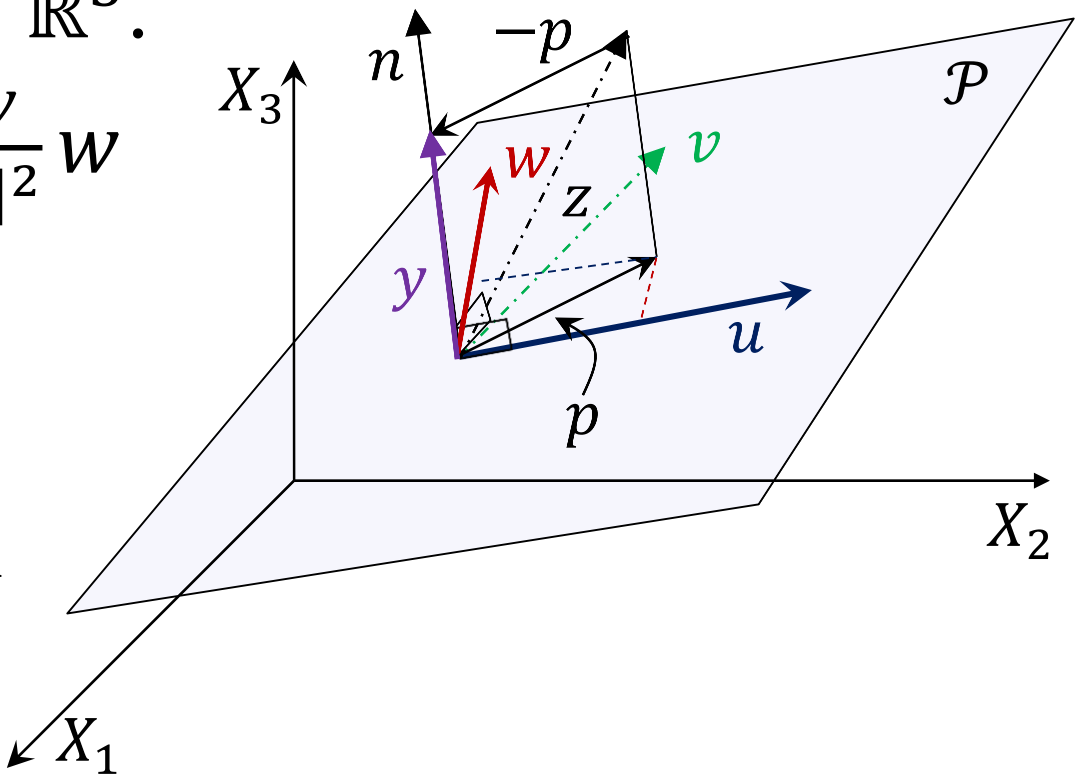
obtemos:

$$y = z - \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

$$y = z - \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w$$

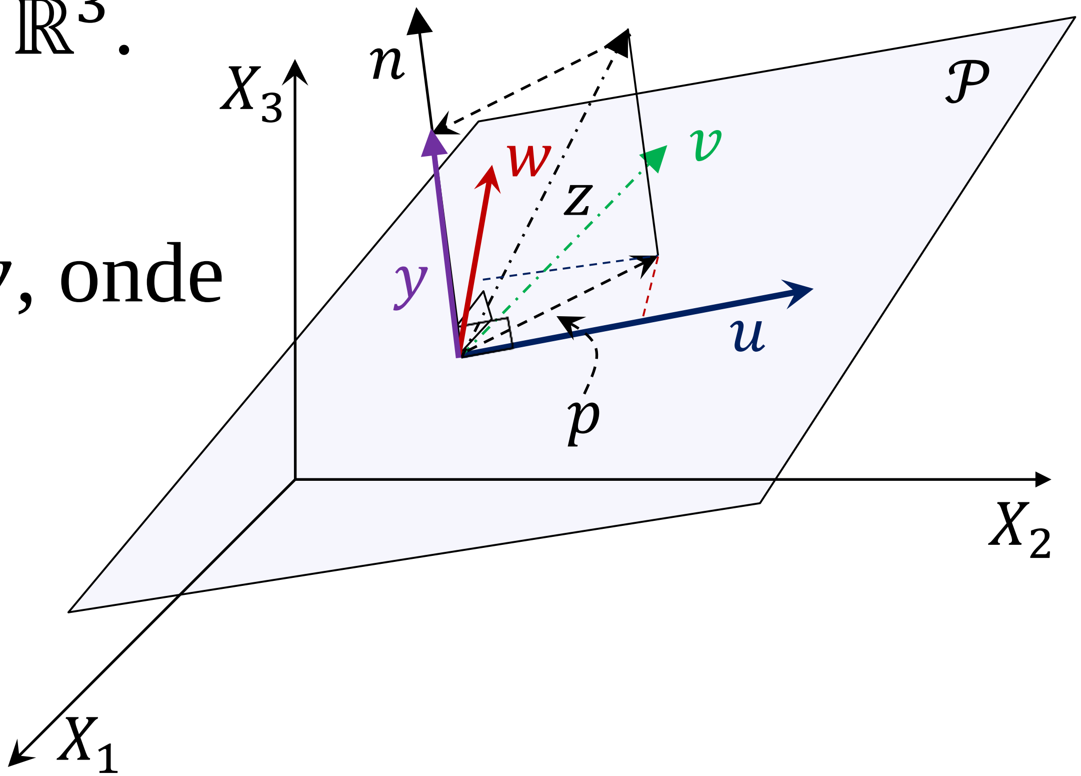


O vetor que sendo substraido é chamado de projeção ortogonal de z sobre o plano $\mathcal{P}$

$$Proj_{\mathcal{P}} z = \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u + \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w \Rightarrow \qquad y = z - Proj_{\mathcal{P}} z$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em $\mathbb{R}^3$. 3 vetores.

Em resumo: Para conseguir três vetores ortogonais a partir de três não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.



Fixamos u.

Substituimos v pelo w, onde

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}\right) u$$

$$w = v - Proj_u v$$

Substituimos z pelo y

$$y = z - Proj_{\mathcal{P}} z \quad \text{ou} \quad y = z - \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w$$

Exercícios de ortogonalização

Utilizando o processo de Gram-Schmidt ortogonalize os vetores a seguir:

1. $u = (1,2,1)$ e $v = (0,2,2)$
2. $u = (2,1,1)$ e $v = (2,2,2)$
3. $u = (1,1,1)$ e $v = (1,1,0)$
4. $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ e $z = (1,1,0)$
5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$, ortonormalize os vetores coluna da matriz A.

Resolução

Usando o processo de Gram-Schmidt ortogonalize

4. $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ e $z = (1,1,0)$

Fixamos $u = (1,0,1)$.

Ortogonalizamos $v = (0,1,1)$, então construimos

$$w = (0,1,1) - \tfrac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}\right)$$

Ortogonalizamos z, obtendo

$$y = (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\left(-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$y = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \qquad y = \tfrac{2}{3}(1,1,-1)$$

Exercícios de ortogonalização: Respostas

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$

Ortogonalizando os vetores coluna obtemos:

$u = (12,6,-4)$, $w = (-69,158,30)$

e $y = (-\frac{58}{5}, \frac{6}{5}, -33)$.

Falta normalizar, isto é, fazer vetores unitários.

Por exemplo: $u_u = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{14}(12,6,-4) = (\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7})$

(5. Fonte: https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/s13-o_processo_de_ortogonalizax00e7x00e3o_de_gramx2013schmidt.html#:~:text=O%20Processo%20de%20Gram%E2%80%93Schmidt,gera%20o%20mesmo%20espa%C3%A7o%20vetorial.)