Forma Quadrática
Representação matricial

ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA / USP

3 de junho de 2020

Expressão algébrica quadrática

Iniciamos o trabalho com expressões quadráticas que são utilizadas nas cônicas e quádricas.

Equação quadrática em $\mathbb{R}^2$:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}x - 40\sqrt{5}y + 5 = 0$$

Expressão algébrica quadrática

Equação quadrática em $\mathbb{R}^2$:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}x - 40\sqrt{5}y + 5 = 0$$

Observando a expressão quadrática à esquerda diferenciam-se três partes:

$$\underbrace{6x^2 + 9y^2 - 4xy}_{\substack{\text{parte quadrática} \\ \text{(parte principal)}}} - \underbrace{\left(20\sqrt{5}x + 40\sqrt{5}y\right)}_{\text{parte linear}} + \underbrace{5}_{\text{parte constante}}$$

Forma quadrática - Definição

Chama-se de **Forma Quadrática** a parte quadrática de uma expressão polinômica, isto é, aos termos quadráticos das variáveis (parte principal).

Observar: A forma quadrática é um polinômio homogêneo de grau dois nas suas variáveis.

No exemplo: A Forma Quadrática é

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy$$

Visto como polinômio:

$$p(x, y) = 6x^2 + 9y^2 - 4xy$$

Forma quadrática em $\mathbb{R}^2$

De forma geral em $\mathbb{R}^2$, uma forma quadrática é:

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

Visto como polinômio:

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

Forma quadrática em $\mathbb{R}^2$

De forma geral em $\mathbb{R}^2$, uma forma quadrática é:

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

Visto como polinômio:

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

De forma geral em $\mathbb{R}^3$, uma forma quadrática é:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

Visto como polinômio:

$$p(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

Parte Linear em $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

Expressões lineares podem ser vistas em matrizes:

$$-20\sqrt{5}x - 40\sqrt{5}y$$

então

$$-20\sqrt{5}x - 40\sqrt{5}y = \begin{bmatrix} -20\sqrt{5} & -40\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Essa expressão matricial é única exeto simplificação

$$-20\sqrt{5}(x + 2y) = -20\sqrt{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Criando a matriz variável $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, temos

$$-20\sqrt{5}(x + 2y) = -20\sqrt{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X$$

Forma quadrática $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

A forma quadrática pode ser representada em matriz?

Para representar a forma quadrática em matriz, é necessário lembrar que não existe

$$\cancel{X^2 = X_{2\times 1}X_{2\times 1}}$$

Mas, existe o produto

$$X^t_{1\times 2}X_{2\times 1} = x^2 + y^2$$

ou simplesmente

$$X^tX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2$$

Forma quadrática $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

Com a expressão,

$$X^t X = x^2 + y^2$$

temos os quadrados das variáveis.

Mas os coeficientes são iguais.

Considerando uma matriz quadrada A de ordem 2×2, a única forma de multiplicar seria

$$X^t A X = X^t_{1\times 2} A_{2\times 2} X_{2\times 1}$$

Forma quadrática $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

Observar:

$$X^t A X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Daqui:

$$X^t A X = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{21}y & a_{12}x + a_{22}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou

$$X^t A X = a_{11}x^2 + a_{21}yx + a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$X^t A X = a_{11}x^2 + (a_{21} + a_{12})xy + a_{22}y^2$$

Na prática: as vezes o yx não deve considerar comutativo!

Forma quadrática $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

Portanto, toda forma quadrática

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

pode ser representada na forma matricial como

$$X^t A X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a_{12} \\ a_{21} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde $c = a_{12} + a_{21}$.

Assim a matriz A não é única.

Sugiro utilizar uma representação matricial simétrica

Forma quadrática $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

Priorizaremos a representação simétrica da forma quadrática

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

utiliza uma matriz simétrica, isto é

$$X^t A X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se a forma não permite comutar os fatores

$$ax^2 + by^2 + cxy + dyx$$

utilize

$$X^t A X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Forma quadrática $\mathbb{R}^2$ – formato matricial

Voltando no exemplo:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy$$

utilizar uma matriz simétrica, isto é

$$X^tAX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Outras possibilidades

$$X^tBX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$X^tCX = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Intervalo para dúvidas

Forma quadrática em $\mathbb{R}^3$

Voltando a forma quadrática geral em $\mathbb{R}^3$:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

Utilizamos:

$$X^tAX = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Utilizando matriz simétrica:

$$X^tAX = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Forma quadrática $\mathbb{R}^3$ – formato matricial

Exemplo 1:

$$3z^2 + 3y^2 - x^2 + yz$$

utiliza uma matriz simétrica, isto é

$$X^tAX = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Outra possibilidade

$$X^tAX = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Forma quadrática $\mathbb{R}^3$ – formato matricial

Exemplo 2:

$$3z^2 - 2y^2 - 4xz$$

se utiliza uma matriz simétrica, isto é

$$X^t A X = X^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = 3z^2 - 2y^2 - 4xz$$

Ao resolver, o fato de ser matriz simétrica vai ajudar, não o fato de ter muitos zeros.

Matrizes congruentes

Definição: Sejam duas matrizes $A, B \in M_{m\times n}$.

A e B são matrizes congruentes se existe uma matriz não singular P tal que $A = P^t B P$

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Se considerarmos $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

vemos que $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} P$

Formas quadráticas equivalentes

Duas formas quadráticas X^tAX e $\bar{X}^tB\bar{X}$ são **equivalentes** se existe uma matriz P, não singular que satisfaz $A = P^tBP$

Exemplo: $X^tAX = X^t\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}X$ e

$$\bar{X}^tB\bar{X} = \bar{X}^t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\bar{X}$$

são equivalentes. Pois

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Formas quadráticas equivalentes

Exemplo:

$$X^t A X = X^t \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = 3x^2 + y^2$$

$$\bar{X}^t B \bar{X} = \bar{X}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{X} = 2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{x}\bar{y})$$

são equivalentes.

Observar que a primeira forma quadrática não tem somandos com multiplicação de variáveis misturadas.

Se são equivalentes podemos trocar um pelo outro.

Exemplo 1

Seja a expressão quadrática completa:

$$x^2 + y^2 + 8xy = 15.$$

Trabalhando a forma quadrática

$$x^2 + y^2 + 8xy = 15 \Rightarrow X^t \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X = 15$$

poderia ser trocada pela

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{X} = 5\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2$$

Utilizar: $P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exemplo 1

Então:

$$x^2 + y^2 + 8xy = 15 \Rightarrow X^t \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X = 15$$

poderia ser trocada pela

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{X} = 5\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2$$

isto é

$$5\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 = 15$$

Pelo menos é mais fácil de classificar.

Exemplo 2

Seja a expressão quadrática completa:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0.$$

Na forma quadrática

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0.$$

$$X^t \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} X - 20\sqrt{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X + 5 = 0$$

Exemplo 2

Seja a expressão quadrática completa:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0.$$

Trabalhando a forma quadrática

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy = X^t \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} X$$

poderia ser trocada pela

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} = 5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$