

Produto Vetorial

\mathbb{R}^3

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

15 de maio de 2020

O espaço vetorial \mathbb{R}^3

Operações no espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Adição: Sejam x e $y \in \mathbb{R}^3$ define-se

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^3$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Produto escalar: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, define-se

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}$$

Espaço vetorial \mathbb{R}^3

Mais uma operação no espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

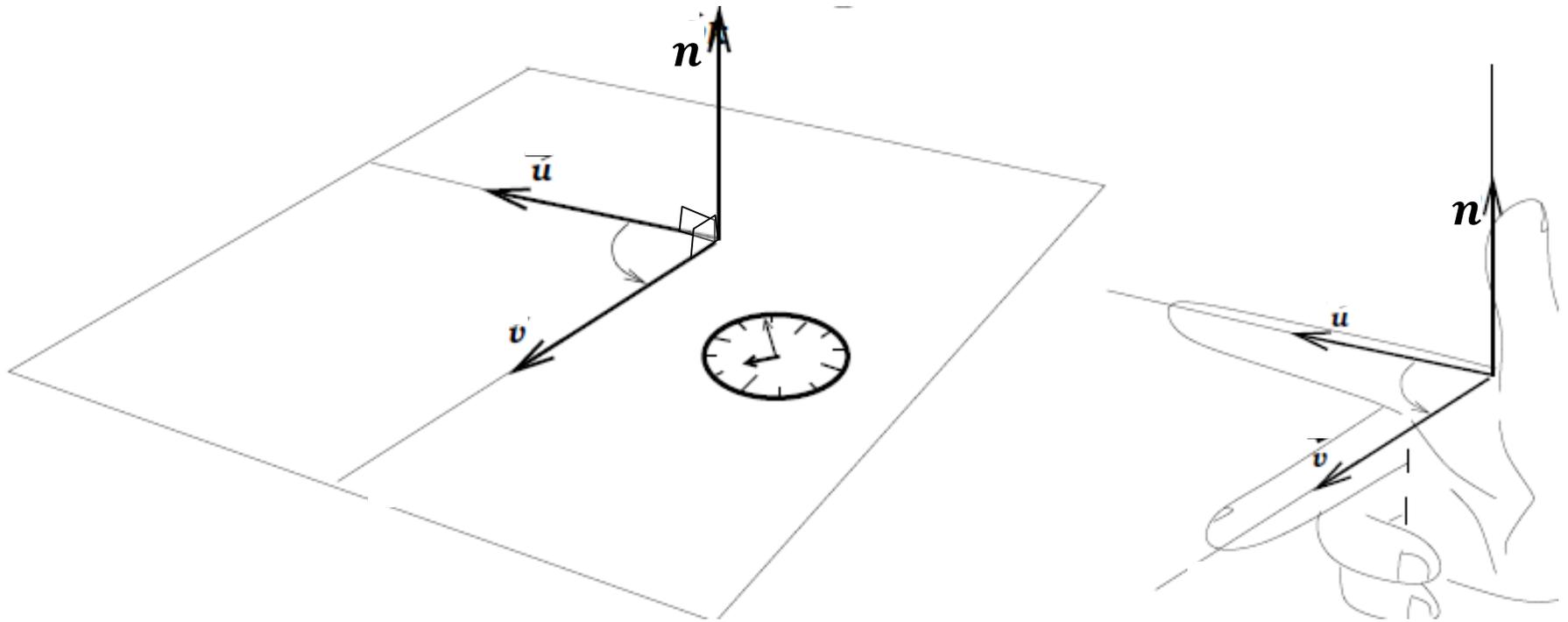
Produto Vetorial

Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$, define-se o produto vetorial $u \times v$ como

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Assim, $u \times v \in \mathbb{R}^3$.

Produto vetorial



Propriedades: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $n = u \times v$, então

1. $u \perp n$ e $v \perp n$ portanto $n \cdot u = 0$ e $n \cdot v = 0$

2. $u \times v = -(v \times u)$

Produto Vetorial

Propriedades: Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, então

3. $u \times u = 0$

4. $u \times 0 = 0$

5. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$

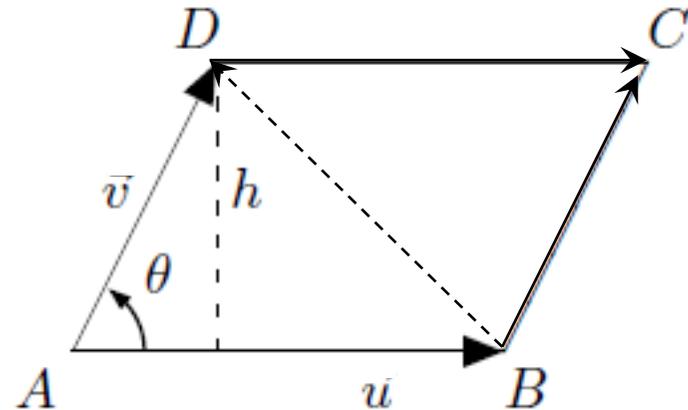
6. $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$

7. Área del paralelogramo

$$\text{Area}(ABCD) = \|u \times v\|.$$

8. Área del triângulo

$$\text{Area}(\triangle ABD) = \frac{1}{2}\|u \times v\|.$$



Exemplo

Considere:

$u = (2,1,2)$ e $v = (-3,1,-1)$. Calcule $n = v \times u$.

Vejamos:

$$v = (-3,1,-1)$$

$$u = (2,1,2)$$

$$n = v \times u = (3,4,-5)$$

Se fosse:

$$v = (-4,-2,-4)$$

$$u = (2,1,2)$$

então

$$n = v \times u = (0,0,0)$$

O espaço vetorial \mathbb{R}^3

Operações para o espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Adição: Sejam x e $y \in \mathbb{R}^3$ define-se

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^3$

$$\text{define-se } \alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Produto escalar: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, define-se

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}$$

Produto vetorial:

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3$$