Ortogonalidade

$$\mathbb{R}^n \left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$$

ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

15 de maio de 2020

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam $x\ e\ y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

$(\mathbb{R}^n, +,)$ é um espaço vetorial.

Tópicos

- Interpretação geométrica das componentes de um vetor como deslocamento nas direções dos eixos.
- Produto escalar (ponto, interno).
- Norma de um vetor.
- Vetor unitário a um vetor dado.
- Ângulo entre vetores. Lei de cosenos.
- Vetores ortogonais. Vetores paralelos.
- Vetor projeção ortogonal, de um vetor sobre outro.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \;/\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

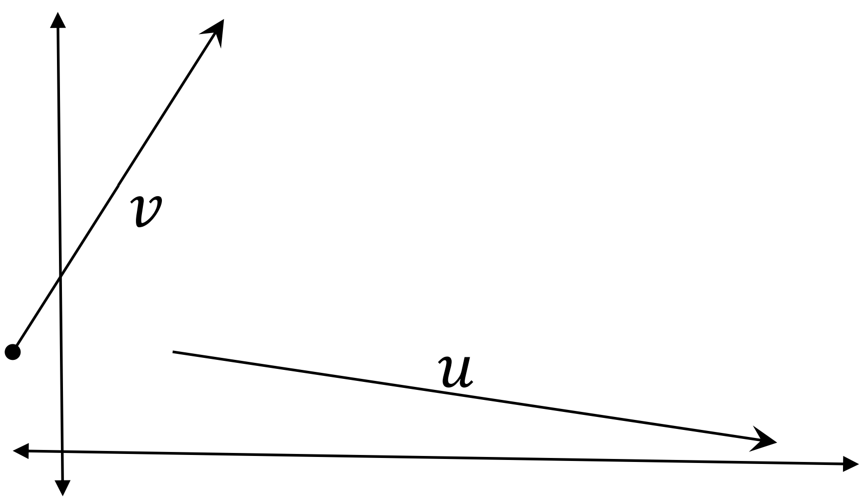
Produto Escalar, (Ponto, Interno, Interior)

Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$, define-se o produto escalar $u \cdot v$ como

$$u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Assim, $u \cdot v \in \mathbb{R}$

(daqui o nome de **escalar**) o resultado é um escalar.



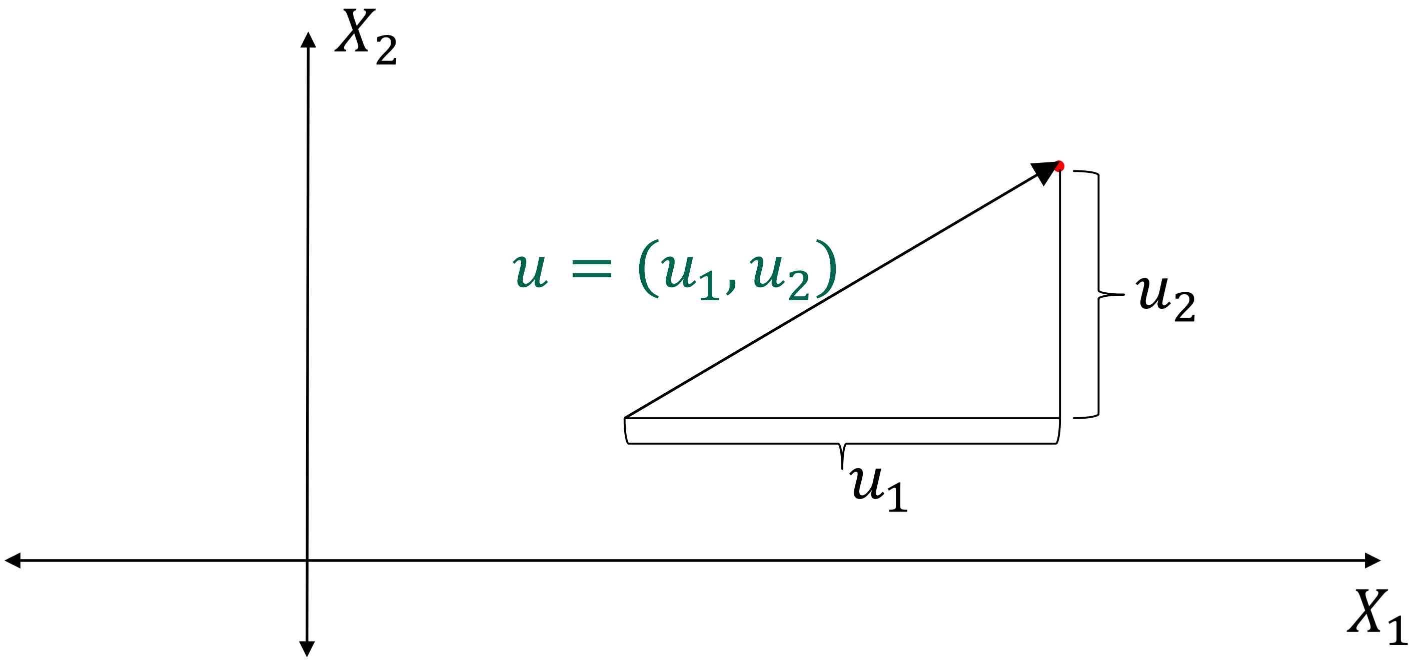
Propriedades do produto escalar

Propriedades:

Sejam os vetores $u, v, z \in \mathbb{R}^2$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $\alpha u \cdot v = \alpha(u \cdot v)$
3. $(u + v) \cdot z = u \cdot z + v \cdot z$
4. $u \cdot u \geq 0.$
5. $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Por Pitágoras: a medida do vetor u, $\|u\|$, é

$$\|u\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

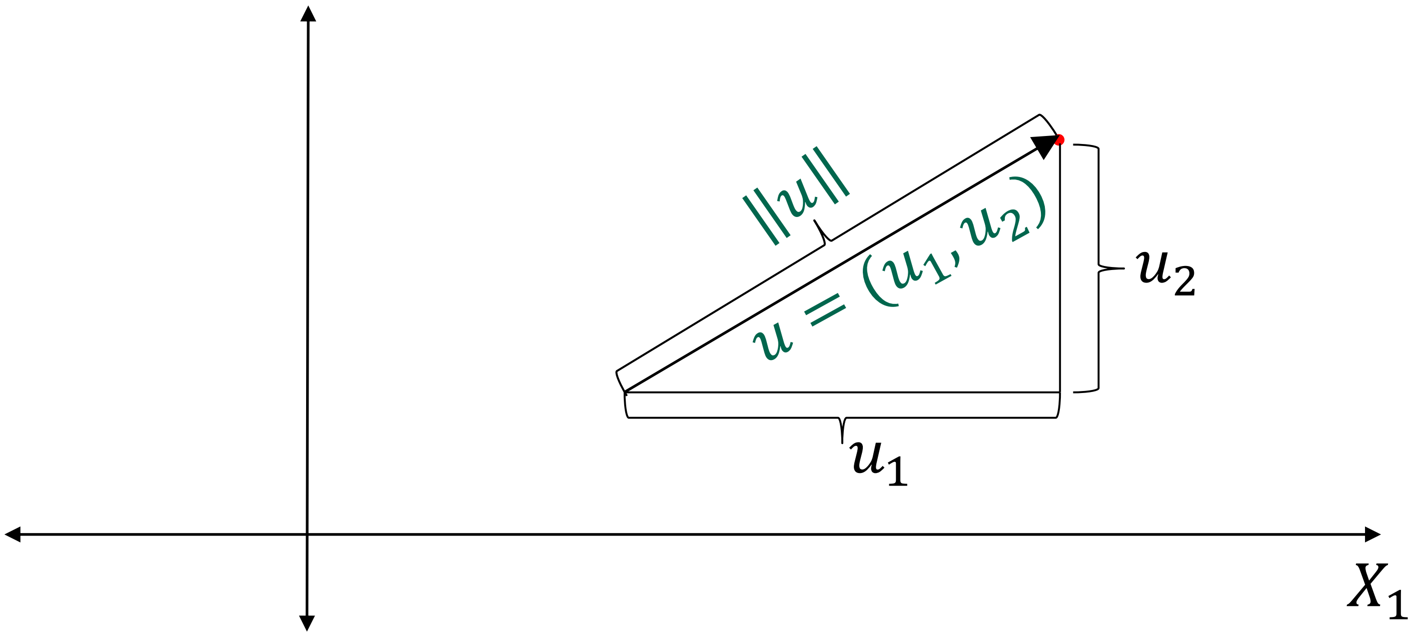
isto é

$$\|u\|^2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 = u_1 u_1 + u_2 u_2 = u \cdot u$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Definição: A medida de um vetor $u \in \mathbb{R}^2$, denota-se por $\|u\|$, é chamada de **norma do vetor** u e

$$\|u\|^2 = u \cdot u$$



Não confundir o vetor e sua norma.

Propriedades da norma de um vetor

Propriedades:

Sejam os vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

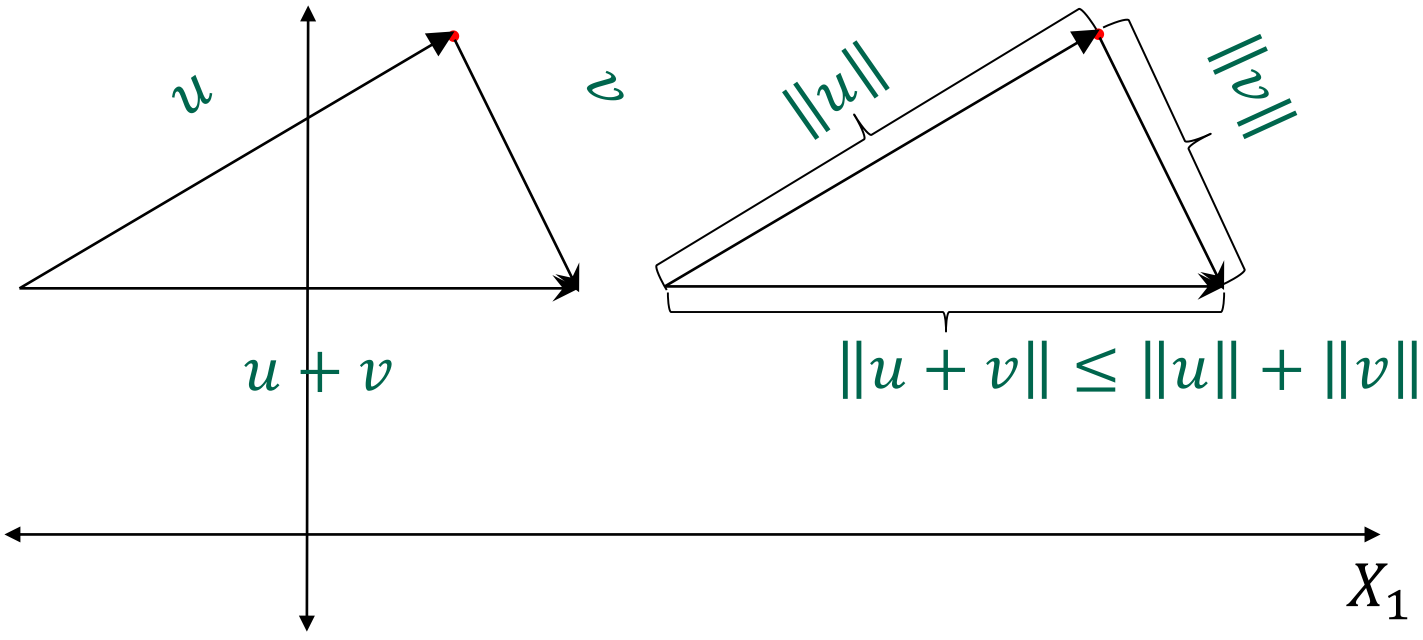
1. $\|u\| \geq 0.$
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
5. Se $v = MN$ então

$$\|v\| = dist(M, N) = \sqrt{(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2}$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Exemplo: Para a propriedade "desigualdade triangular"

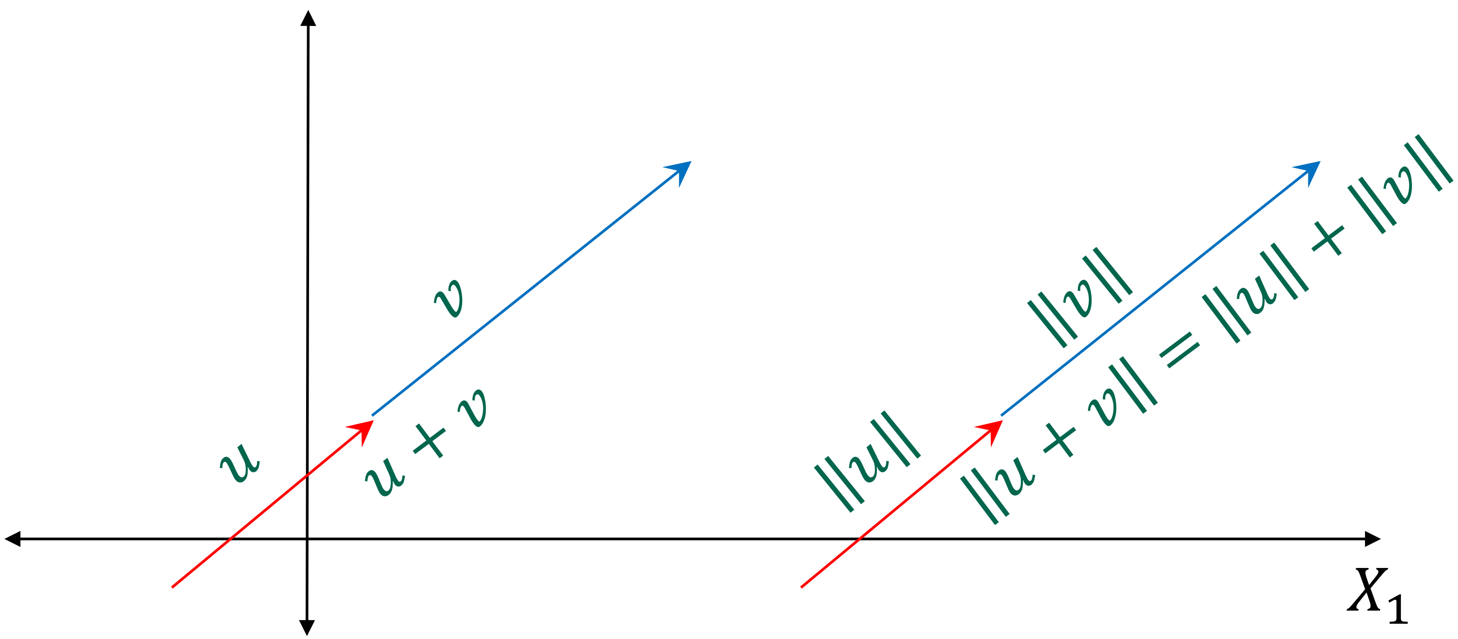
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Exemplo: Para a propriedade "desigualdade triangular"

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



Vetor unitário

Dado qualquer vetor não nulo, $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^2$ então

$$\|v\| \neq 0$$

Portanto, sempre existe o valor real $\frac{1}{\|v\|}$.

Podemos construir o vetor v_u da seguinte forma:

$$v_u = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v$$

Vetor unitário

Dado qualquer vetor não nulo, $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^2$ então

$$\|v\| \neq 0$$

Portanto, sempre existe o valor real $\frac{1}{\|v\|}$.

Podemos construir o vetor v_u da seguinte forma:

$$v_u = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v$$

Observar:

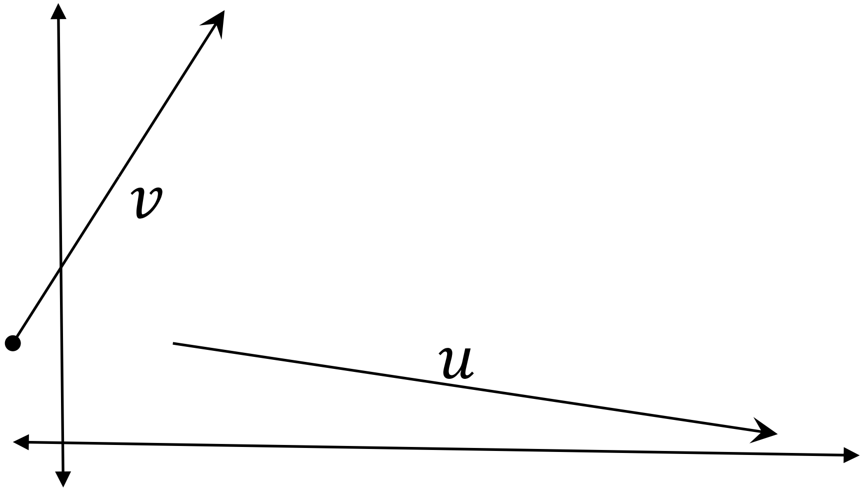
$$\|v_u\| = \left\|\left(\frac{1}{\|v\|}\right) v\right\| = \left|\frac{1}{\|v\|}\right| \|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

Definição: O vetor v_u é chamado de **vetor unitário** do vetor v não nulo.

Formação de um triângulo

Se temos dois vetores
$$u, v \in \mathbb{R}^2$$

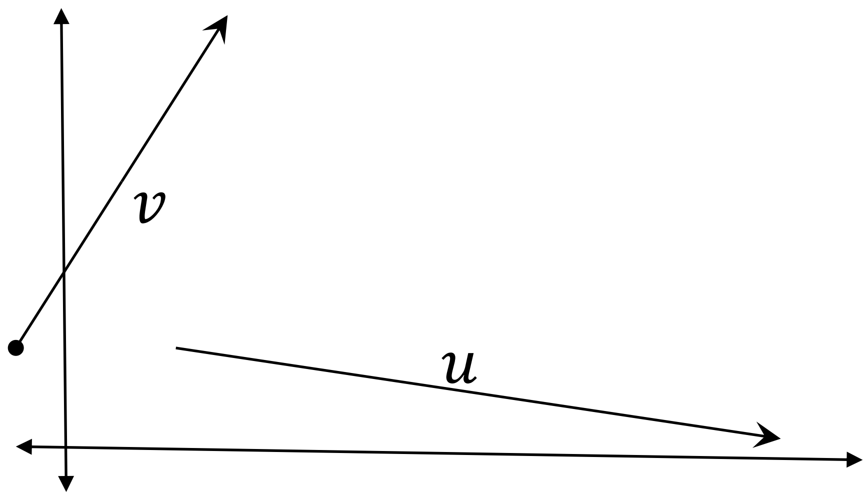
Sempre podem ser representados utilizando um ponto comum.



Formação de um triângulo

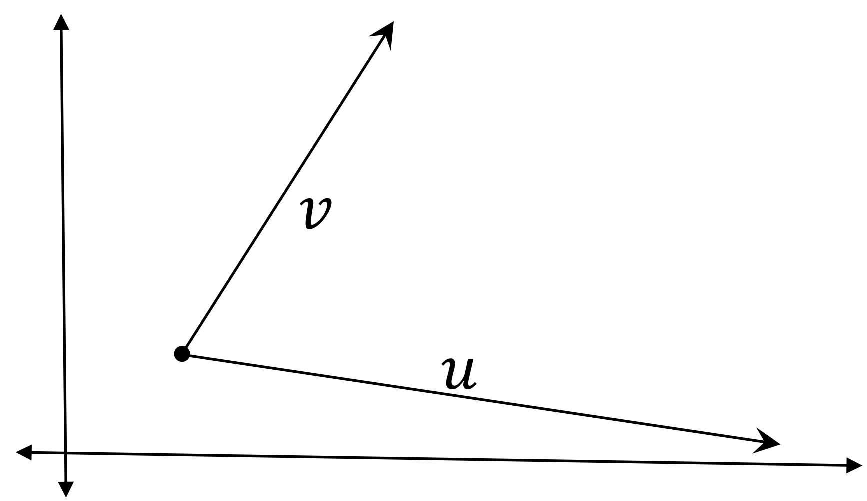
Se temos dois vetores

$$u, v \in \mathbb{R}^2$$



Sempre podem ser representados utilizando um ponto comum.

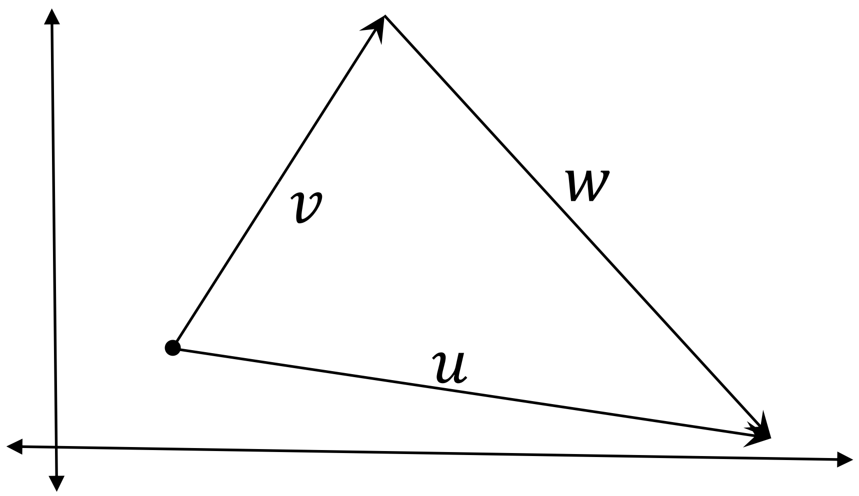
Como na figura:



Formação de um triângulo

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$

Se eles não são nulos, sempre podemos construir um triângulo unindo os extremos finais dos vetores com um vetor w: $v + w = u \Rightarrow w = u + (-v)$

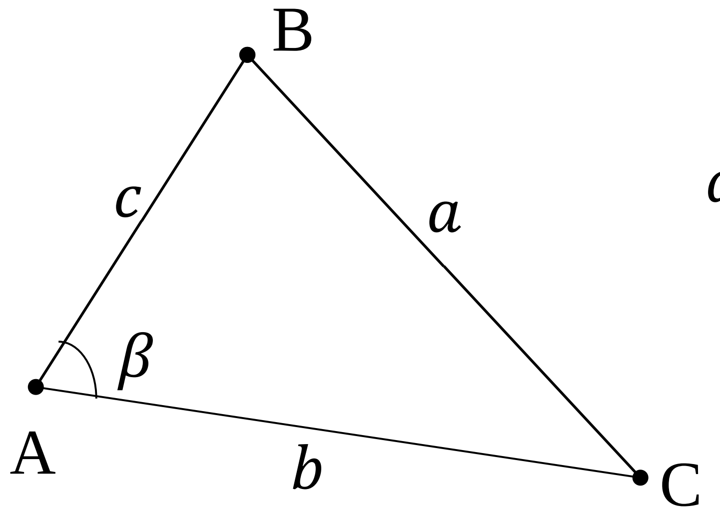


$$w = u - v$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Visão vetorial para alguns resultados geométricos.

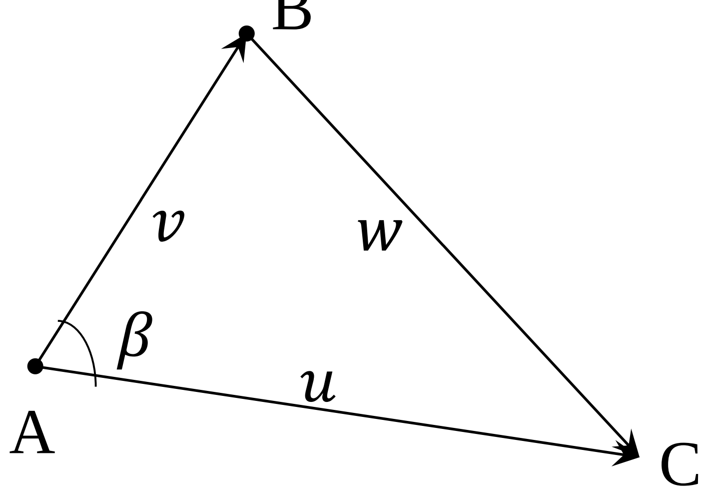
Ângulo entre vetores: Lembrando a lei de cosenos em um triângulo. As letras minúsculas são as medidas dos lados.

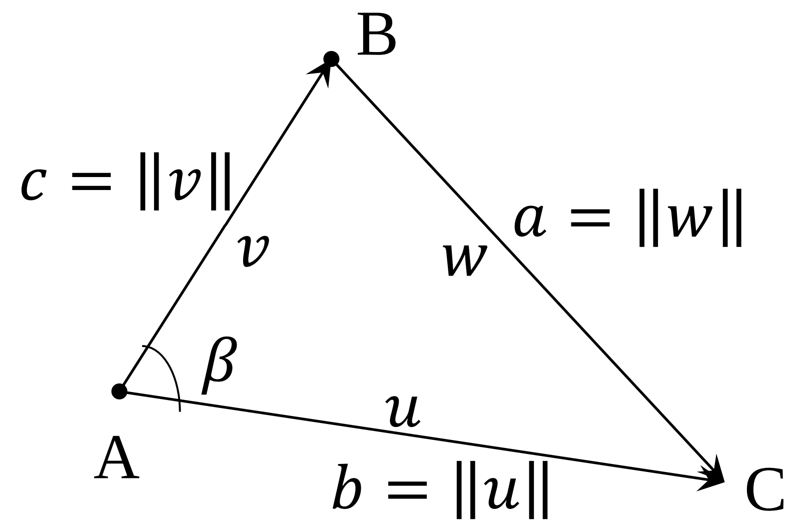


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta)$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Olhando como vetores



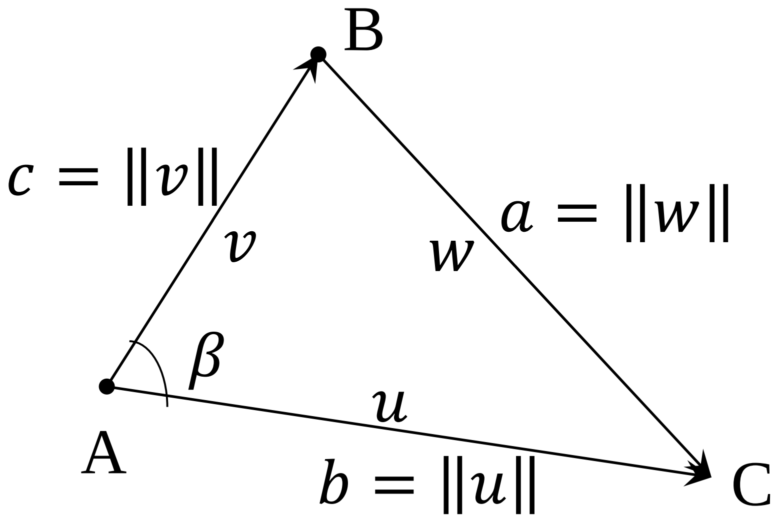


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta)$$

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\beta)$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Olhando como vetores



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta)$$

Por outro lado

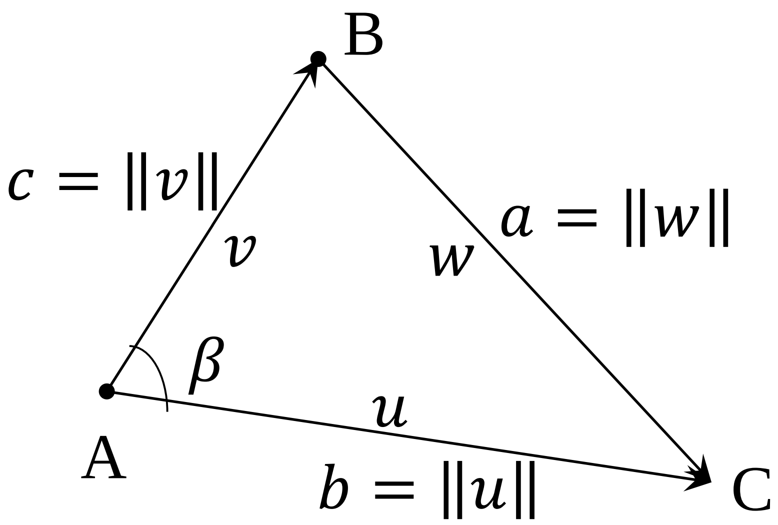
$$w = u - v$$

$$\|w\|^2 = w \cdot w =$$
$$= (u - v) \cdot (u - v)$$
$$= u \cdot u - v \cdot u - u \cdot v + v \cdot v$$
$$= u \cdot u - 2u \cdot v + v \cdot v$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$$

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\beta)$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Olhando como vetores



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta)$$

Por outro lado

$$w = u - v$$

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &= w \cdot w = \\
&= (u - v) \cdot (u - v) \\
&= u \cdot u - v \cdot u - u \cdot v + v \cdot v \\
&= u \cdot u - 2u \cdot v + v \cdot v \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v
\end{aligned}$$

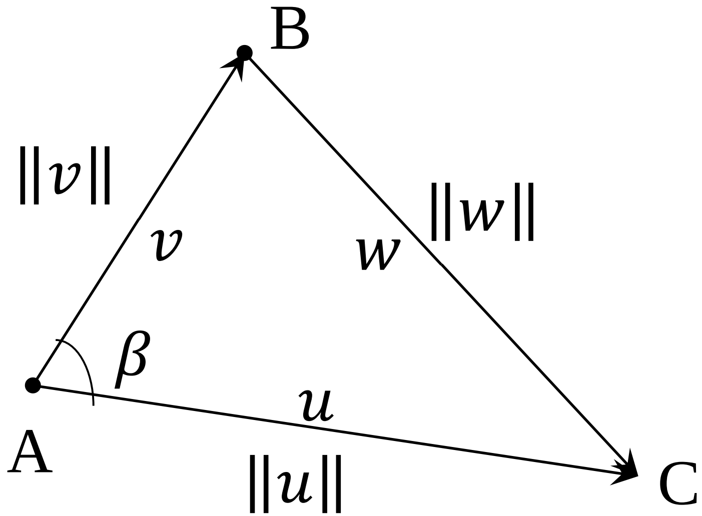
$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\beta)$$

Igualando:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(\beta)$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Ângulo entre vetores:



Cancelando somandos:

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos(\beta)$$

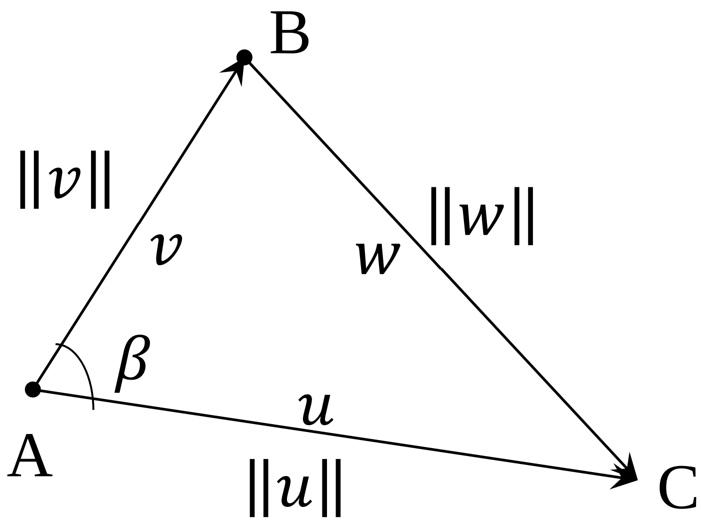
para todos os $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Observar: Se $\beta = 90° = \frac{\pi}{2}$

então $u \cdot v = 0$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Ângulo entre vetores: Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$

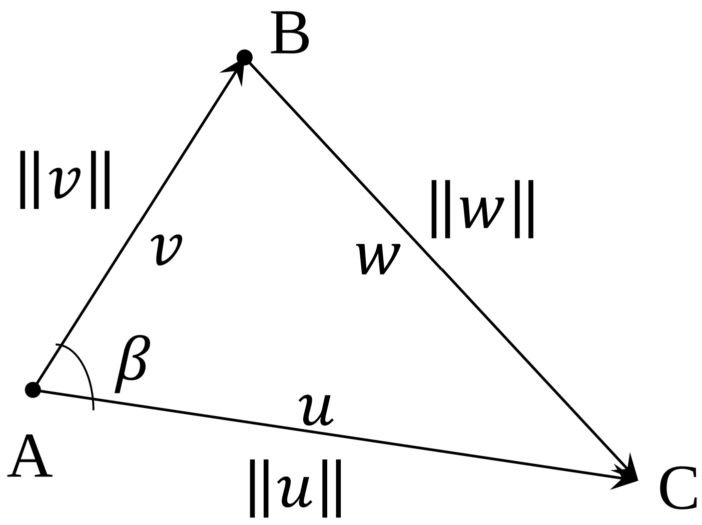


$$\cos(\beta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

determinando o ângulo entre dois vetores não nulos $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Ângulo entre vetores:



Se $u = 0$ ou $v = 0$

então $u \cdot v = 0$

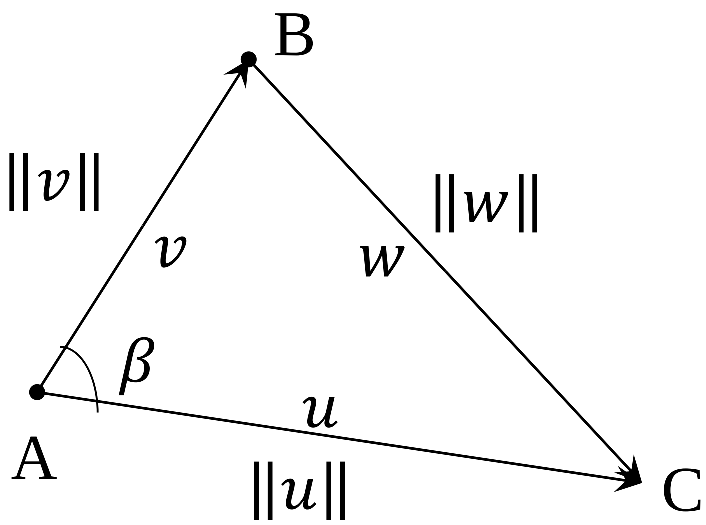
e temos

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(\beta)$$
$$0 = 0$$

Portanto o ângulo β pode assumir qualquer valor.

Nota: O vetor zero 0 forma qualquer ângulo com outro vetor.

Ortogonalidade



Para $u, v \in \mathbb{R}^2$ não nulos.

Se $u \cdot v = 0$, então

$$\cos(\beta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = 0$$

Então $\beta = n\left(\frac{\pi}{2}\right)$

para n ímpar.

Agora, se $\beta = n\left(\frac{\pi}{2}\right)$, para n ímpar, então

$$u \cdot v = 0$$

Ortogonalidade

Se $u = 0$ ou $v = 0$ então $u \cdot v = 0$

e temos

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos(\beta)$$

$$0 = 0$$

Portanto o ângulo β pode assumir qualquer valor, em particular $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Definição: **ortogonalidade** $(\perp)$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

Ortogonalidade

Definição: **ortogonalidade** $(\perp)$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é muito fácil, obter um vetor ortogonal a um vetor dado v.

Se $v = (v_1, v_2)$ construimos o vetor

$$v^{\perp} = (-v_2, v_1)$$

Ortogonalidade

Definição: **ortogonalidade** $(\perp)$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é muito fácil, obter um vetor ortogonal a um vetor dado v.

Se $v = (v_1, v_2)$ então o vetor $v^\perp = (-v_2, v_1)$ é chamado de **vetor ortogonal de $\boldsymbol{v}$**, pois

$$v^\perp \cdot v = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0$$

O $v^\perp$ é o vetor v girando $\frac{\pi}{2}$ no sentido **antihorário**.

Vetores paralelos

Observar: seja $v \in \mathbb{R}^2$ e seja um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

Constuimos o vetor $u = \alpha v$

então o ângulo entre u e v satisfaz

$$\cos(\beta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{\alpha v \cdot v}{\|\alpha v\|\|v\|} = \frac{\alpha \|v\|^2}{|\alpha|\|v\|^2} = \pm 1$$

Vetores paralelos

Observar: seja $v \in \mathbb{R}^2$ e seja um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ talque o vetor $u = \alpha v$ então o ângulo entre u e v satisfaz

$$\cos(\beta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \pm 1$$

Assim, $\beta = k\pi$.

Vetores paralelos: Dizemos que $u, v \in \mathbb{R}^2$ são paralelos se e somente se existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ talque

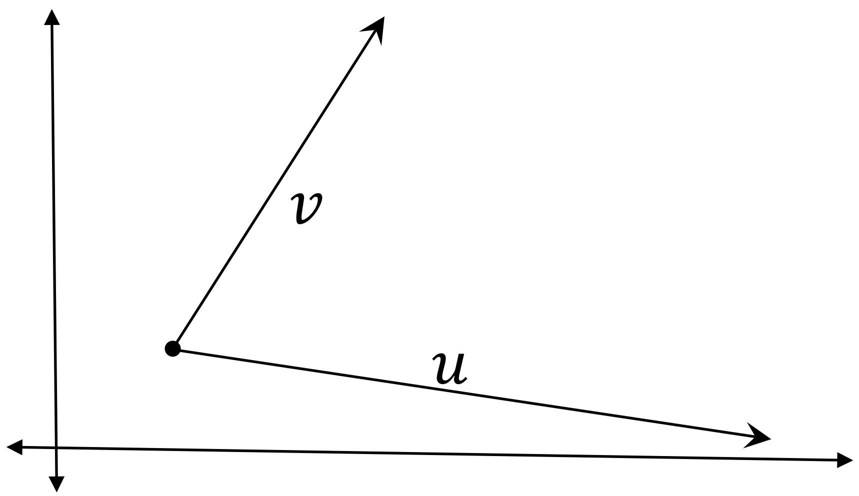
$$u = \alpha v$$

Escreve-se: $u \parallel v \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ talque $u = \alpha v$

Vetor projeção ortogonal (Apenas $\mathbb{R}^2$)

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Pergunta: é possível formar um triângulo retângulo sobre u, com o vetor v como hipotenusa?

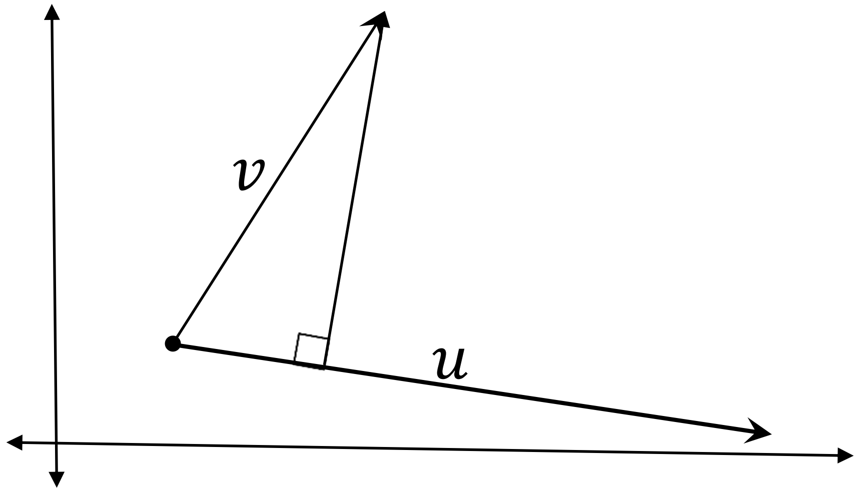


Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Pergunta: é possível formar um triângulo retângulo sobre u, com o vetor v como hipotenusa?

Sim, é possível:



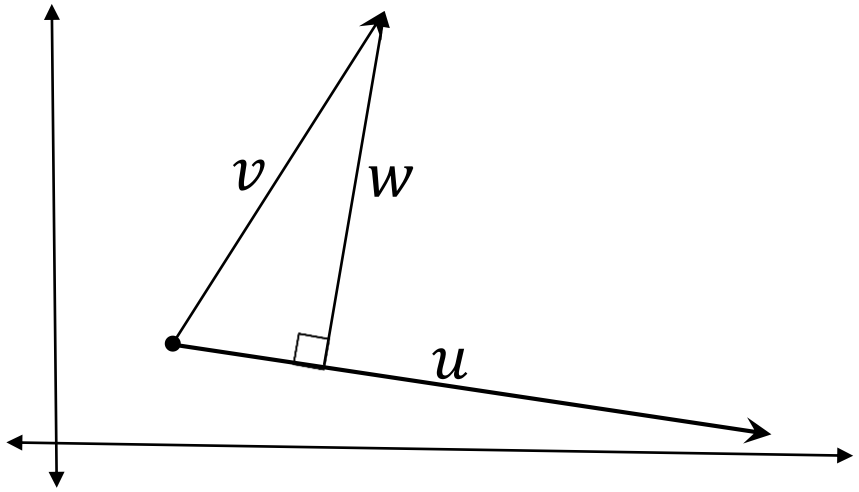
Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Pergunta: Podemos conhecer o cateto sobre u ?

Observar:

$w \perp u$ então $u \cdot w = 0$



Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

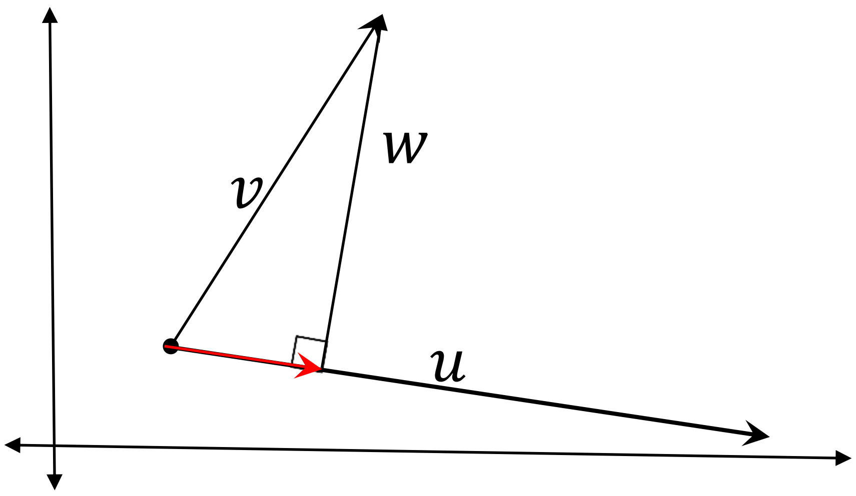
Pergunta: Podemos conhecer o cateto sobre u ?

Observar:

Pode ser entendido

como a sombra de v

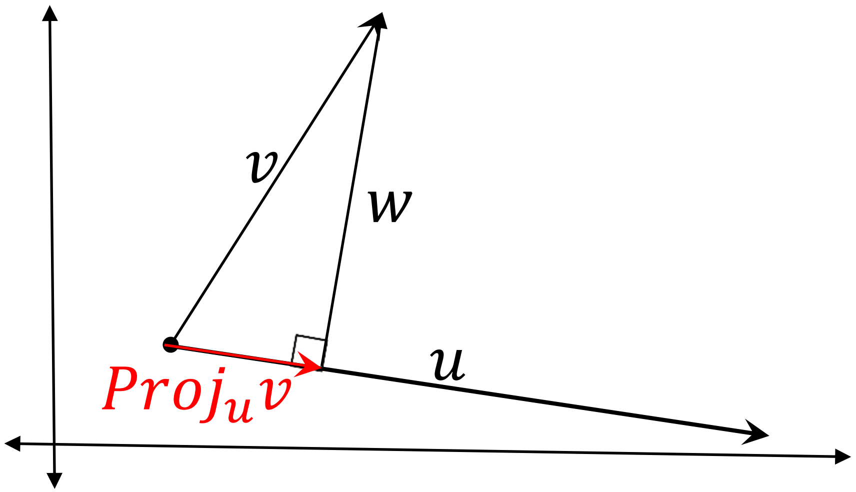
sobre o vetor u .



Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Pergunta: Podemos conhecer o cateto sobre u ?



Observar:

Pode ser entendido como

a sombra de v sobre u,

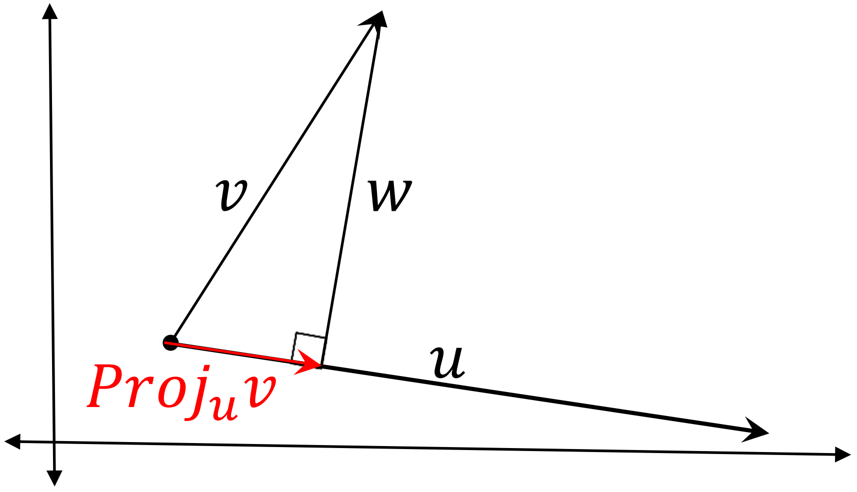
a projeção de v sobre u,

e será denotado por $Proj_u v$.

Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Pergunta: Podemos conhecer o cateto sobre u ?



Observe o vetor projeção

é paralelo a u:

Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ talque

$$Proj_u v = \alpha u.$$

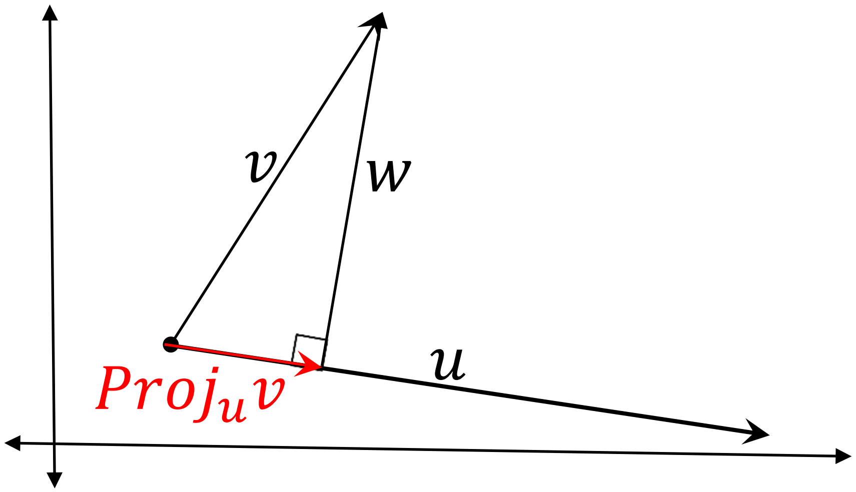
Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$, não nulos.

Sempre que possível destaque a soma de vetores:

$$v = Proj_u v + w$$

$$v = \alpha u + w$$



Vetor projeção ortogonal

Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$, não nulos.

Vejamos o potencial do produto escalar:

$$v = Proj_u v + w$$

$$v = \alpha u + w$$

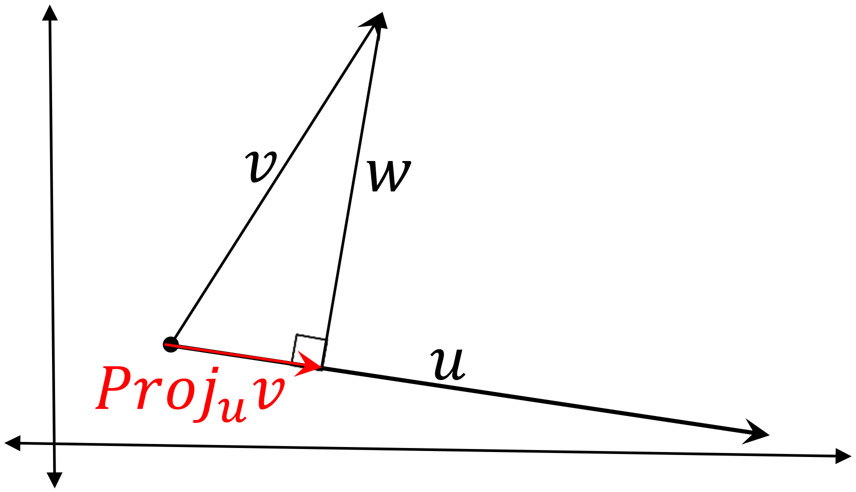
Agora aplicamos o produto escalar com o vetor u:

$$v \cdot u = \alpha u \cdot u + w \cdot u$$

$$v \cdot u = \alpha \|u\|^2 + 0$$

então

$$\alpha = \frac{v \cdot u}{\|u\|^2}$$



Vetor projeção ortogonal

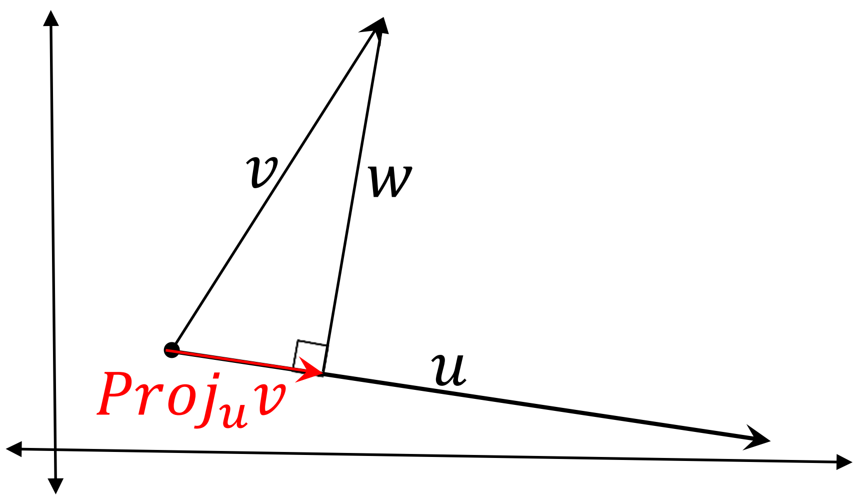
Sejam dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$, não nulos.

Assim, o **vetor projeção ortogonal** de v sobre u é

$$Proj_u v = \alpha u = \frac{v \cdot u}{\|u\|^2} u$$

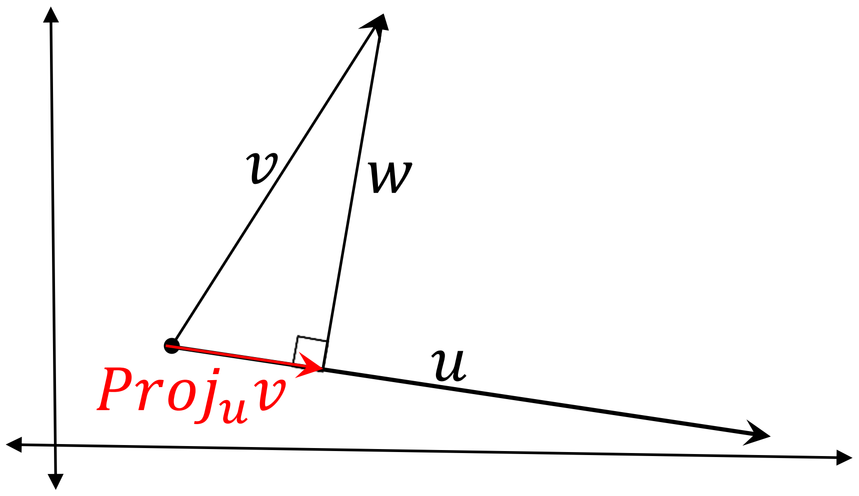
O escalar é chamado de **componente** de v sobre u e se escreve por

$$Comp_u v = \alpha = \frac{v \cdot u}{\|u\|^2}$$

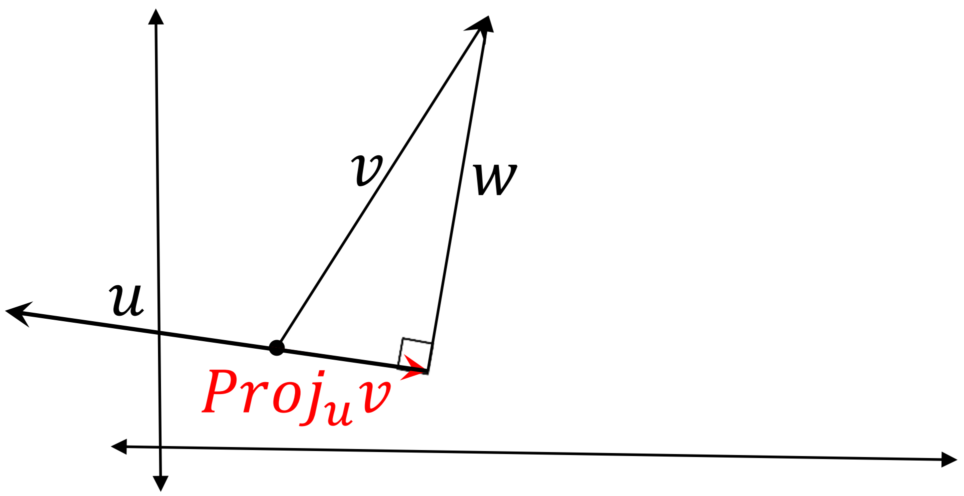


Vetor projeção ortogonal

Se a componente de v sobre u é positiva, então:



Se a componente de v sobre u é negativa, então:



Espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Todos os conceitos dados, podem ser estendidos para o espaço $\mathbb{R}^n$.

Produto Escalar

Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, define-se o produto escalar $u \cdot v$ como

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Assim, $u \cdot v \in \mathbb{R}$.

Todas as propriedades dadas em $\mathbb{R}^2$ são válidas em $\mathbb{R}^n$.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Definição: A medida de um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é a **norma do vetor** e

$$\|u\|^2 = u \cdot u$$

Definição: Dado um vetor não nulo, $v \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, o vetor

$$v_u = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v$$

é chamado de **vetor unitário** de v.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Ângulo entre vetores:

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $u \neq 0$ e $v \neq 0$, então o ângulo entre u e v é dado por

$$\cos(\beta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

Ortogonalidade $(\perp)$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

Vetores paralelos:

$$u \parallel v \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ talque } u = \alpha v$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Operações no espaço vetorial

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Adição: Sejam $x\ e\ y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Produto escalar: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$, define-se

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \in \mathbb{R}$$