

Base e Dimensão de um espaço Vetorial

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

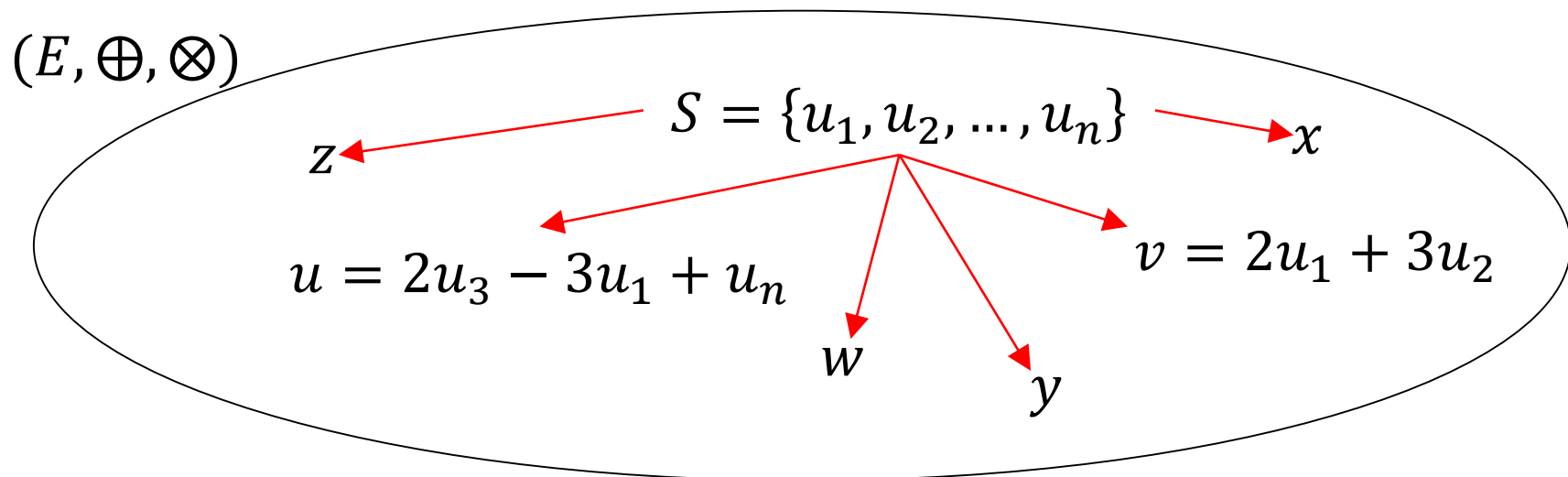
11 de maio de 2020

4. Base de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é **uma base de E** , se:

a. S gera o espaço E , e



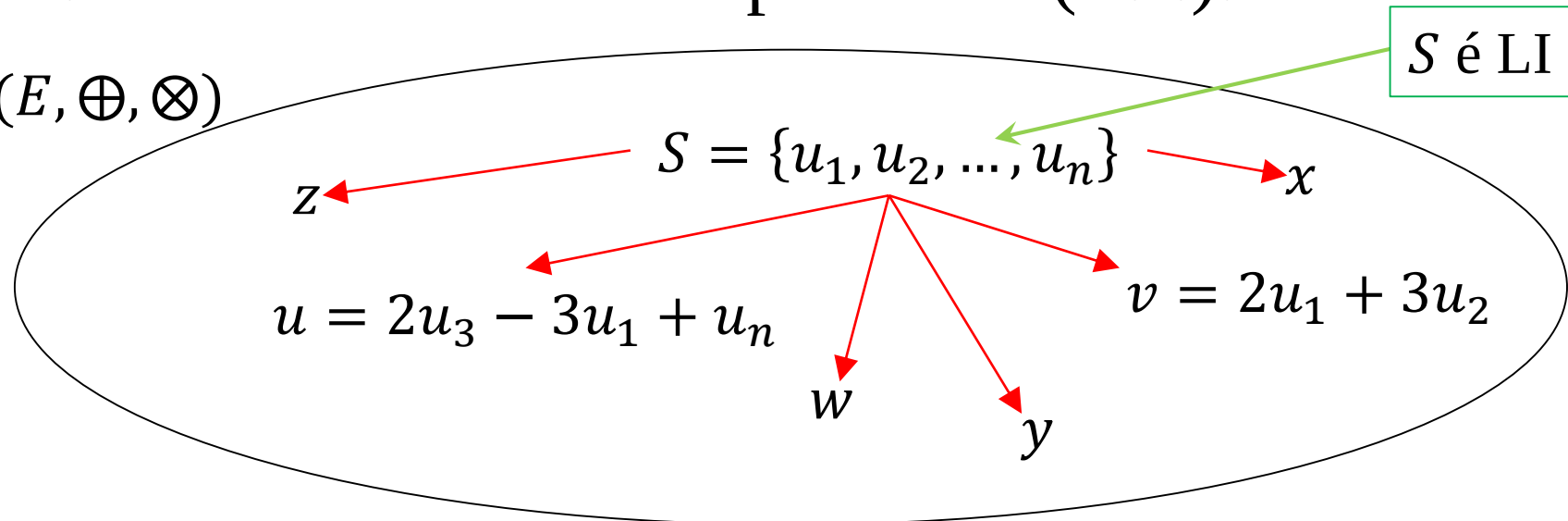
4. Base de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é **uma base de E** , se:

- a. S gera o espaço E , e
- b. S é linearmente independente (L.I.).

$(E, \oplus, \otimes)$



4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 1: $S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$ é uma base de P_2 . (Vide exemplo 3 do conceito 3.)

Exemplo 2: $S = \{(-2, 0, -6), (1, -2, 1), (1, 0, 3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$, pois não é gerador de $\mathbb{R}^3$ e também não é LI.

Exemplo 3: $S = \{(-2, -5), (1, -2), (0, 3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$. S é gerador de $\mathbb{R}^2$, mas não é LI.

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E , envolve duas combinações lineares, de

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E , envolve duas combinações lineares, de

- a. ser gerador: para todo $v \in E$ devem existir $c_1, c_2, \dots, c_n$ talque $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$
- b. ser LI: se $0 = d_1u_1 + d_2u_2 + \dots + d_nu_n$, necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, \dots, d_n = 0$.

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E , envolve duas combinações lineares, de

- a. ser gerador: para todo $v \in E$ devem existir $c_1, c_2, \dots, c_n$ talque $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$
- b. ser LI: se $0 = d_1u_1 + d_2u_2 + \dots + d_nu_n$, necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, \dots, d_n = 0$.

Nota: Por estar considerando juntas as duas combinações devemos diferenciar os coeficientes.

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 4: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Formamos o conjunto de três soluções

$$\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}. \quad \delta \text{ é uma base de } S ?$$

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2, c_3 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2, c_3 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. δ é LI ?

$$\text{se } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ então,}$$

necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0$.

4. Base de um espaço vetorial

Vamos apresentar um processo simplificado para determinar se um conjunto é base.

Observar: os dois sistemas a serem resolvidos são

$$\text{(gerador)} \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{(LI)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Mesma matriz. Podemos resolver simultaneamente.

4. Base de um espaço vetorial

Matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & | & a - 2b & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & b & | & 0 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & \frac{1}{2}(a-5b) & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & b & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Existem infinitas soluções. δ é gerador (existir), mas δ não é LI, pois a solução devia ser única.

δ não é base de S .

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 5: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Formamos o conjunto de três soluções

$$\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad \delta \text{ é uma base de } S ?$$

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. δ é LI ?

$$\text{se } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ então,}$$

necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0$.

4. Base de um espaço vetorial

Observar: os dois sistemas a serem resolvidos são

$$\text{(gerador)} \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(LI)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo simultaneamente.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & a - 2b & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

4. Base de um espaço vetorial

Também temos $0 = 0$, mas não temos infinitas soluções.

A primeira solução dá $c_1 = a$ e $c_2 = b$ (existem) portanto é gerador de S .

A segunda solução dá $d_1 = 0$ e $d_2 = 0$ (única solução) portanto é um conjunto LI.

Concluimos que δ é **base de S** .

5. Dimensão de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Se o conjunto de vetores $\beta \subset E$ é uma base de E , o **número de elementos da base β é a dimensão do espaço vetorial E .**

5. Dimensão de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Se o conjunto de vetores $\beta \subset E$ é uma base de E , o **número de elementos da base β é a dimensão do espaço vetorial E .**

No último exemplo 5, vimos que $\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
é base do espaço vetorial $S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Portanto, a dimensão de S é dois: $\dim(S) = 2$.

Exemplo

Considere o sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos o conjunto solução

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} / x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Considerando S com a adição e multiplicação vezes escalar usuais de matrizes, S é um espaço vetorial.

Determine uma base para S

Toda solução tem a forma

$$X = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, decimos que o conjunto dado pelos dois vetores fixos achados para representar qualquer solução, gera S .

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para ser base do espaço vetorial S , falta verificar que é LI.

Uma base para S

Observe:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ -2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

cuja única solução é $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$.

Portanto, β é base de S . S é um espaço vetorial de dimensão 2.

As triplas (ternas) $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Uma tripla qualquer, $x \in \mathbb{R}^3$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

o que significa que o conjunto com esses três vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

As triplas (ternas) $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Uma tripla qualquer, $x \in \mathbb{R}^3$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses três vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de vetores fixos

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é LI, então β é uma base para $\mathbb{R}^3$.

As triplas (ternas) $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Uma tripla qualquer, $x \in \mathbb{R}^3$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses três vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de vetores fixos

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é LI, então β é uma base para $\mathbb{R}^3$.

Assim, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

β é conhecida como a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

As duplas (pares) $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Uma dupla qualquer, $x \in \mathbb{R}^2$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses dois vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^2$. Também são LI.

A base canônica(simples) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\}$$

Assim, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

As duplas (pares) $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Uma dupla qualquer, $x \in \mathbb{R}^2$, pode ser expressada:

$$x = (x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

o que significa que o conjunto com esses dois vetores fixos gera o espaço $\mathbb{R}^2$. Também são LI.

A base canônica(simples) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\}$$

Assim, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Não é a única: $\beta_1 = \{(1,1), (-1,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

$\beta_2 = \{(2,3), (-3,2)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

As n -uplas (énuplas) $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Para qualquer, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1)$$

O conjunto com esses n vetores fixos gera $\mathbb{R}^n$.

O conjunto de vetores fixos

$$\beta = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

é LI, então β é uma base para $\mathbb{R}^n$.

Assim, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

β é conhecida como a base canônica de $\mathbb{R}^n$.