Base e Dimensão de um espaço Vetorial

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

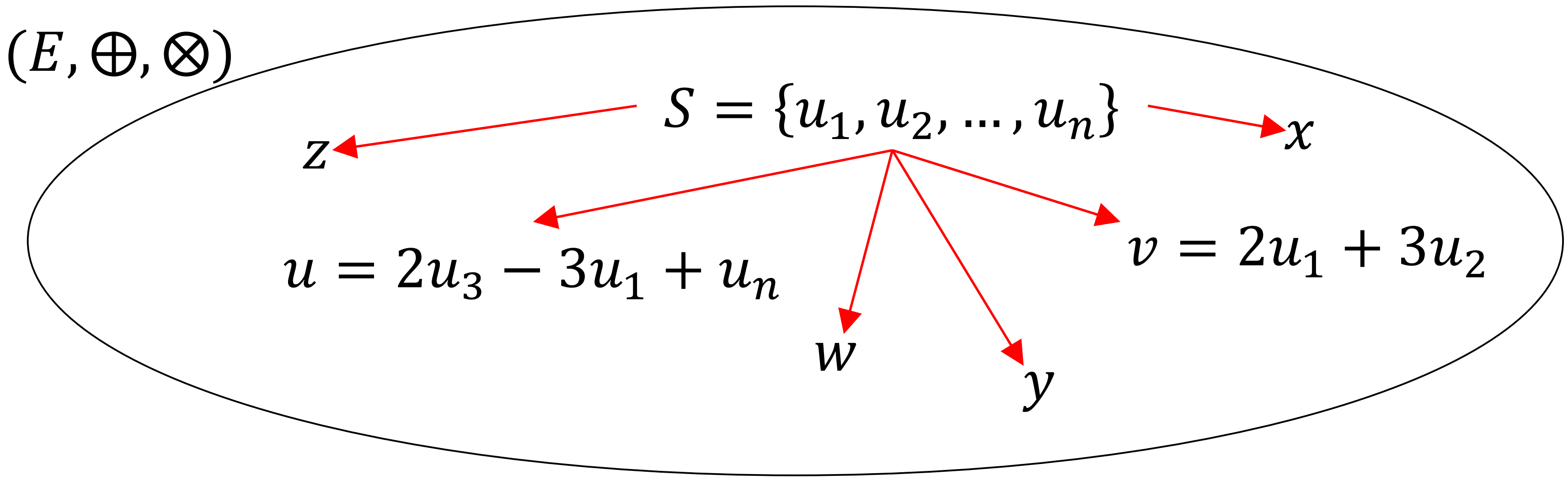
16 de abril de 2020

4. Base de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset E$ é **uma base de E**, se:

a. S gera o espaço E, e



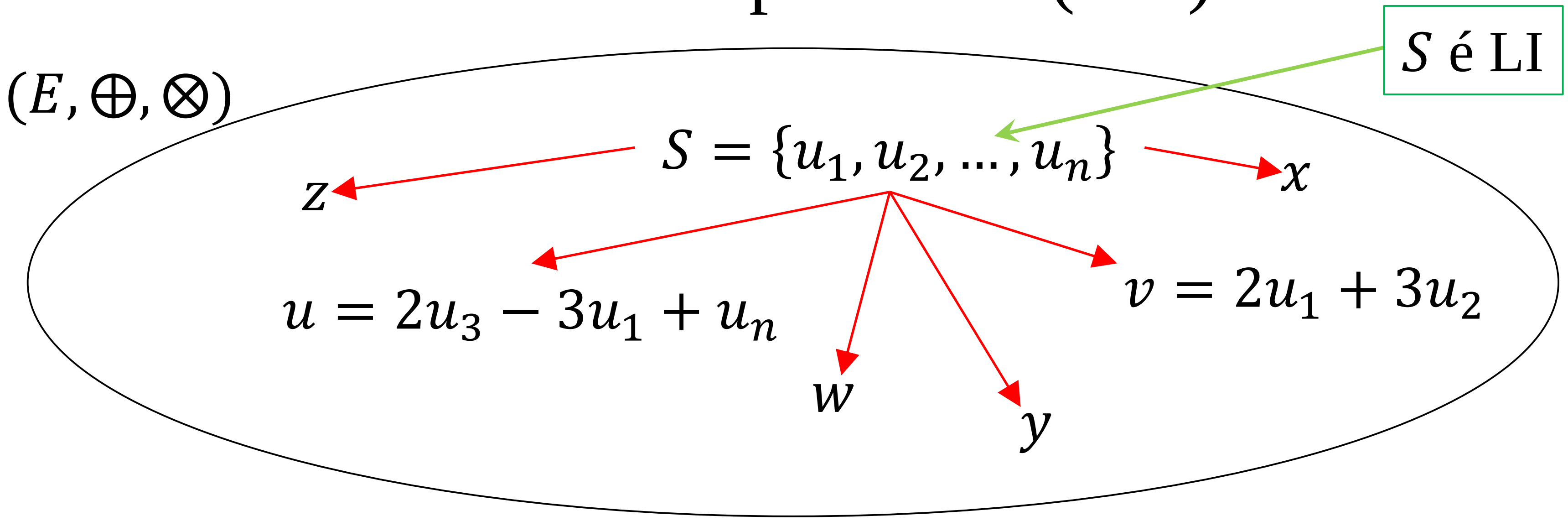
4. Base de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Um conjunto de vetores $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset E$ é **uma base de E**, se:

a. S gera o espaço E, e

b. S é linearmente independente (L.I.).



4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 1: $S = \{t + 2, t^2 - 9, 2t - 4 + 3t^2\}$ é uma base de P_2. (Vide exemplo 3 do conceito 3.)

Exemplo 2: $S = \{(-2,0,-6), (1,-2,1), (1,0,3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$, pois não é gerador de $\mathbb{R}^3$ e também não é LI.

Exemplo 3: $S = \{(-2,-5), (1,-2), (0,3)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$. S é gerador de $\mathbb{R}^2$, mas não é LI.

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E, envolve duas combinações lineares, de

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E, envolve duas combinações lineares, de

a. ser gerador: para todo $v \in E$ devem existir $c_1, c_2, \dots, c_n$ talque $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$

b. ser LI: se $0 = d_1u_1 + d_2u_2 + \cdots + d_nu_n$, necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, \dots, d_n = 0$.

4. Base de um espaço vetorial

Verificar, se um conjunto de vetores S é uma base de um espaço vetorial E, envolve duas combinações lineares, de

a. ser gerador: para todo $v \in E$ devem existir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ talque $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$

b. ser LI: se $0 = d_1u_1 + d_2u_2 + \cdots + d_nu_n$, necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, \ldots, d_n = 0$.

Nota: Por estar considerando juntas as duas combinações devemos diferenciar os coeficientes.

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 4: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Formamos o conjunto de três soluções

$$\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

δ é uma base de S ?

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2, c_3 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

$a.$ δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2, c_3 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b. δ é LI ?

se $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ então,

necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0.$

4. Base de um espaço vetorial

Vamos apresentar um processo simplificado para determinar se um conjunto é base.

Observar: os dois sistemas a serem resolvidos são

(gerador) $\begin{bmatrix} a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

(LI) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$

Mesma matriz. Podemos resolver simultaneamente.

4. Base de um espaço vetorial

Matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & | & a-2b & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & b & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & \frac{1}{2}(a-5b) & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & b & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Existem infinitas soluções. δ é gerador (existir), mas δ não é LI, pois a solução devia ser única.

δ **não é base de** S.

4. Base de um espaço vetorial

Exemplo 5: Seja o sistema homogêneo $AX = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução é um espaço vetorial:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Formamos o conjunto de três soluções

$$\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

δ é uma base de S ?

4. Base de um espaço vetorial

Devemos verificar que δ é gerador de S e é LI.

a. δ é gerador de S ?

para todo $v \in S$ devem existir c_1, c_2 talque

$$v = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. δ é LI ?

se $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ então,

necessariamente $d_1 = 0, d_2 = 0.$

4. Base de um espaço vetorial

Observar: os dois sistemas a serem resolvidos são

(gerador) $\begin{bmatrix} a-2b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(LI) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$.

Resolvendo simultaneamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & a-2b & | & 0 \\ 1 & 0 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & | & b & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & a & | & 0 \\ 0 & 1 & | & b & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

4. Base de um espaço vetorial

Também temos $0 = 0$, mas não temos infinitas soluções.

A primeira solução dá $c_1 = a$ e $c_2 = b$ (existem) portanto é gerador de S.

A segunda solução dá $d_1 = 0$ e $d_2 = 0$ (única solução) portanto é um conjunto LI.

Concluimos que δ **é base de** S.

5. Dimensão de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Se o conjunto de vetores $\beta \subset E$ é uma base de E, **o número de elementos da base β é a dimensão do espaço vetorial E.**

5. Dimensão de um espaço vetorial

Definição: Seja E um espaço vetorial.

Se o conjunto de vetores β ⊂ E é uma base de E, **o número de elementos da base β é a dimensão do espaço vetorial** E.

No último exemplo 5, vimos que $\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

é base do espaço vetorial $S = \left\{ \begin{bmatrix} a - 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Portanto, a dimensão de S é dois: $\dim(S) = 2$.