ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 5 - Espaço vetorial - vetores.

PREMISSA: Os sistemas lineares de equações devem ser tratadas como equações matriciais.

1. Considere os seguintes conjuntos de vetores. Quais deles são subespaços de $\mathbb{R}^4$?
   (a) (x, y, z, w) tais que $x - y = 2$.
   (b) (x, y, z, w) tais que $z = x = 2y$ e $w = x - 3y$.
   (c) (x, y, z, w) tais que $x = y = 0$.
   (d) (x, y, z, w) tais que $x = 0$ e $y = -w$.

2. Seja A uma matriz $n \times n$ fixa. Determine se os conjunto dados são ou não espaços vetoriais.
   (a) $G = \{B \in M_{n\times n} \ / \ AB = BA\}$.
   (b) $G = \{B \in M_{n\times n} \ / \ AB$ e BA são diferentes$\}$.
   (c) $G = \{B \in M_{n\times n} \ / \ BA = 0\}$

3. Encontre um conjunto de vetores que gera o espaço solução do sistema homogêneo $AX = 0$, sendo:
   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.
   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Encontre conjuntos geradores para os seguintes subespaços:
   (a) $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / 3a - 5b + 2c = 0\}$.
   (b) $E = \{A \in M_{2x2} / 3a_{11} = 2a_{12}\}$.
   (c) $E = \{p \in P_3 / p(2) = 0\}$.
   (d) $E = \{p \in P_3 / p(2) = p(-1)\}$.

5. Encontre uma base para os seguintes espaço de $\mathbb{R}^3$,
   (a) Todos os vetores da forma (a, b, c), onde $b = a$.
   (b) Todos os vetores da forma (a, b, c), onde $a = 0$.

(c) Todos os vetores da forma $(a-b, b+c, 2a-b+c)$.

6. Encontre a dimensão dos seguintes sub-espaços:

   (a) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $d = a + b$.

   (b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), onde $c = a - b$ e $d = a + b$.

   (c) Todos os vetores da forma $(a + c, a - b, b + c, -a + b)$.

7. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $V = (x, y, z)$ tais que $x + 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{V_1, V_2, V_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que V_1 e V_2 pertençam a W.

8. Seja o espaço vetorial de polinômios P_2.

   (a) Mostre que os polinômios: 1, $t - 1$, $t^2 - 3t + 1$ formam uma base de P_2.

   (b) Expresse o polinômio $2t^2 - 5t + 6$ como combinação linear dos elementos da base.

9. Encontre os valores λ, tais que o sistema homogêneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ tenha solução não nula (não trivial). E para estes valores de λ encontre uma base para o conjunto solução, para as seguintes matrizes A:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Seja P_3 o espaço vetorial de todos os polinômios de ordem 3 (com as somas e multiplicação por escalar usuais). Seja W_1 o subespaço de P_3, que consiste de todos os polinômios $p(t)$ tais que $p(0) = 0$. E seja W_2 o subespaço de P_3, que consiste de todos os polinômios $q(t)$ tais que $q(1) = 0$. Encontrar uma base para os espaços:
    (a) W_1 (b) W_2 (c) $W_1 \cap W_2$. (Considere os espaços com as operações usuais).