

Sub-Espaço Vetorial

Notas de Aula para a Disciplina ZAB0161

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

17 de abril de 2020

Subespaço vetorial

- Muitas vezes queremos trabalhar com um conjunto “pequeno”, mas sem perder as propriedades de um espaço vetorial.
- Então, perguntamos, dado um espaço vetorial (E, \oplus, \otimes) , é possível que exista um subconjunto próprio “menor”, $S \subset E$, que também seja espaço vetorial?

Para poder falar de espaço vetorial o conjunto S deve ser munido das operações de adição e multiplicação vezes escalar que já estão definidas (S, \oplus, \otimes) .

Exemplo

Sabemos que o conjunto das matrizes $M_{3 \times 1}$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

Por outro lado, ao resolver a equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenho infinitas soluções.

O conjunto solução toma a forma:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo

Sabemos que o conjunto das matrizes $M_{3 \times 1}$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

Por outro lado, ao resolver a equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tenho infinitas soluções.

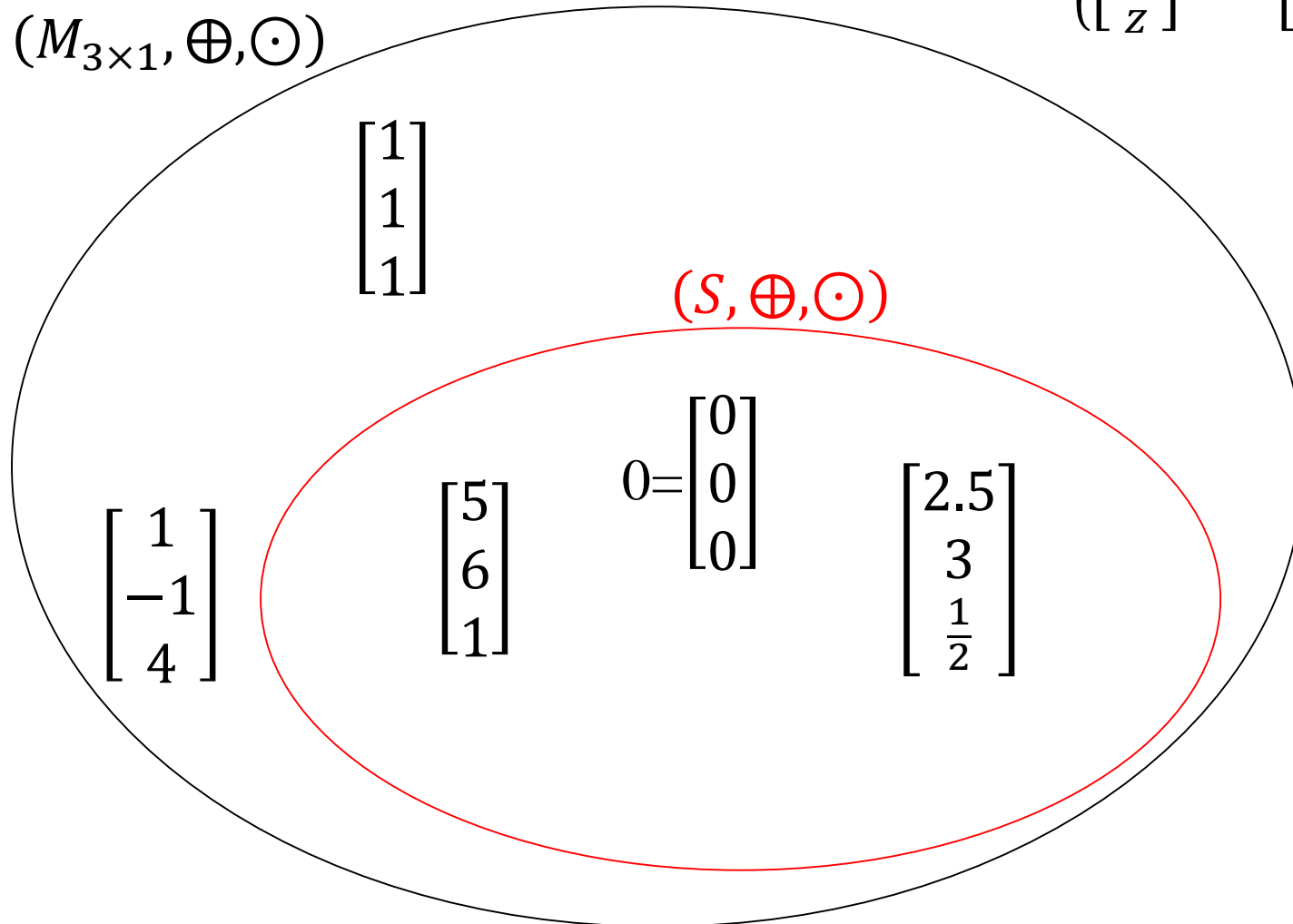
O conjunto solução toma a forma:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \text{ é um espaço vetorial?}$$

Exemplo

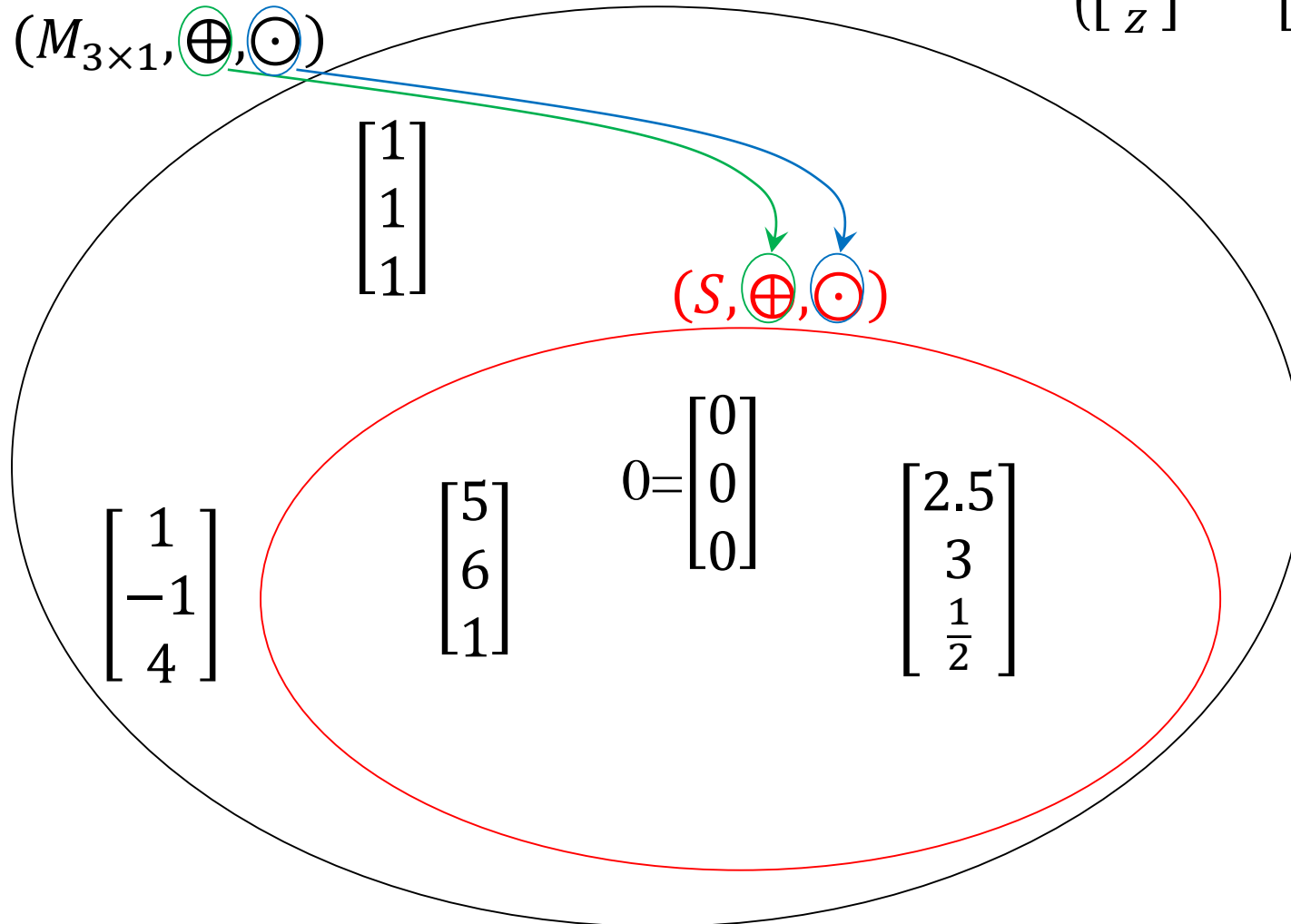
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$(M_{3 \times 1}, \oplus, \odot)$



Exemplo

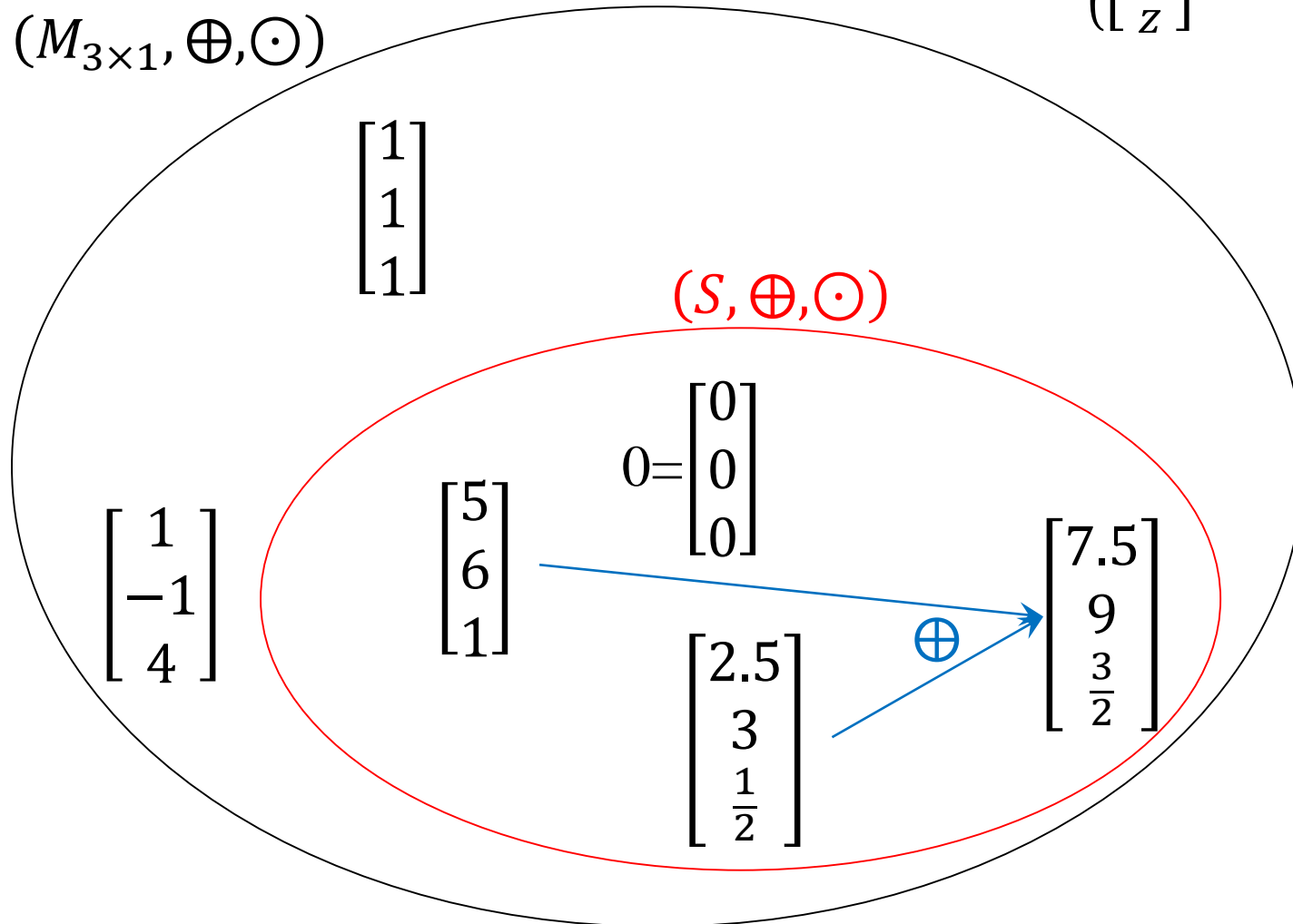
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$



Exemplo

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$(M_{3 \times 1}, \oplus, \odot)$



Subespaço vetorial

- Dado um espaço vetorial (E, \oplus, \otimes) , com adição e multiplicação vezes escalar definidas, então um subconjunto $S \subset E$, com a adição e multiplicação vezes escalar de E restringindo para S , (S, \oplus, \otimes) , é chamado de **subespaço vetorial** se ele é fechado para a adição restringida (A1) e é fechado para a multiplicação por escalar restringida (M1).

Exemplo: Retas e Planos passando pela origem.

Mais exemplos

1. O conjunto solução da equação homogênea

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais?

O conjunto solução toma a forma:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5z \\ 6z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{3 \times 1}$$

Assim (S, \oplus, \otimes) é um espaço vetorial.

(Verifique como subespaço vetorial, considerando $S \subset M_{3 \times 1}$).

Mais exemplos (cont)

2. O conjunto solução do sistema $AX = F$ é um espaço vetorial com as operações usuais?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução toma a forma

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 - r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{4 \times 1}$$

O conjunto solução (S, \oplus, \otimes) **não é espaço vetorial!**

Propriedade A1

A propriedade A1:

$$\text{Se } u, v \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 - r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \oplus v \in S$$

Isto é:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade A1

A propriedade A1:

$$\text{Se } u, v \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 - r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \oplus v \in S$$

Isto é:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ daqui } u \oplus v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S$$

Propriedade A1

A propriedade A1:

$$\text{Se } u, v \in S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 - r \\ 1 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow u \oplus v \in S$$

Isto é:

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ daqui } u \oplus v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S$$

Portanto, S não é espaço vetorial. (Também falha M1)

Espaços vetoriais similares

Observar que é possível expressar de forma similar, todo elemento dos espaços:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = (x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

$$M_{2 \times 1} \longrightarrow x \in M_{2 \times 1} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = x_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{1 \times 2} \longrightarrow x \in M_{1 \times 2} \Rightarrow x = [x_{11} \quad x_{12}] = x_{11}[1 \quad 0] + x_{12}[0 \quad 1]$$

$$P_1 \longrightarrow x \in P_1 \Rightarrow x = x_1 t + x_0 = x_1(t) + x_0(1)$$

Espaços vetoriais similares

Vejam os um exemplo:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

$$M_{2 \times 1} \longrightarrow x \in M_{2 \times 1} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{1 \times 2} \longrightarrow x \in M_{1 \times 2} \Rightarrow x = [a \quad b] = a[1 \quad 0] + b[0 \quad 1]$$

$$P_1 \longrightarrow x \in P_1 \Rightarrow x = at + b = a(t) + b(1)$$

Outros espaços vetoriais

Relacionar ternas \mathbb{R}^3 , matrizes $M_{3 \times 1}$, matrizes $M_{1 \times 3}$, e polinômios de ordem 2 (P_2).

Relacionar as n-uplas \mathbb{R}^n , com matrizes $M_{n \times 1}$, matrizes $M_{1 \times n}$, e polinômios de ordem (n-1) P_{n-1} .