COVARIÂNCIA

Sejam X e Y v.a. com distribuição de probabilidade conjunta f(x,y). A *covariância* de X e Y é

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

e pode ser escrita como

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Exemplo

X: número de moradores
Y: número de televisores

Qual a covariância de (X,Y)?

Função de probabilidade conjunta e marginais

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Qual a covariância de (X,Y)?

TEOREMA

Se X e Y são v.a. independentes então

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

COROLÁRIO

Se X e Y são v.a. independentes então

$$Cov(X, Y) = 0$$

Demonstração

PERGUNTA: Se Cov(X,Y) = 0 então X e Y são independentes?

Vamos ver um exemplo para responder.

f(x,y)		x		
y	0	1	2	h(y)
1	3/20	3/20	2/20	8/20
2	1/20	1/20	2/20	4/20
3	4/20	1/20	3/20	8/20
g(x)	8/20	5/20	7/20	1

Exemplo

X: número de moradores
Y: número de televisores

X e Y são independentes?

Função de probabilidade conjunta e marginais

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

MATRIZ DE VARIÂNCIA E COVARIÂNCIA

A *matriz de variância e covariância* de duas v.a. X e Y é dada por

$$V(X,Y) = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & V(Y) \end{pmatrix}$$

Como Cov(X,Y) = Cov(Y,X) podemos escrever

$$V(X,Y) = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

Exemplo

X: número de moradores
Y: número de televisores

A matriz de variância e covariância de X e Y é dada por

Função de probabilidade conjunta e marginais

f(x,y)		x		
y	1	2	3	h(y)
0	0,02	0	0	0,02
1	0,20	0,08	0,05	0,33
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0	0,10	0,10	0,20
g(x)	0,32	0,38	0,30	1

Exemplo

Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A matriz de variância-covariância de X e Y é

CORRELAÇÃO

Sejam X e Y v.a. então a *correlação populacional* entre X e Y é dada por

$$Cor(X,Y) = \rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

CARACTERÍSTICAS DA CORRELAÇÃO

- É uma medida admensional.
- Pertence ao intervalo [-1,1].
- Se igual a -1 indica uma relação linear perfeita e decrescente.
- Se igual a 1 indica uma relação linear perfeita e crescente.
- Se as v.a. são independentes sua correlação é zero.
- Se é zero, nada podemos afirmar quanto a dependência das v.a.
- CUIDADO: Não confundir com a correlação amostral conhecida como coeficiente de correlação de Pearson.

Exemplo

Sejam X uma v.a. e $Y = 2X + 1$. Obtenha a correlação de (X,Y).

COMBINAÇÃO LINEAR DE V.A. NORMAIS INDEPENDENTES

Sejam X e Y duas v.a. Independentes tais que $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Então

$$aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

para a e b constantes.

CASO GERAL

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tais que

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, n.$$

Então

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

em que

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \text{ e } \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

CASO PARTICULAR

Conisere que $\mu_i = \mu \text{ e } \sigma_i^2 = \sigma^2, i = 1, \ldots, n$, e

$a_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n.$ Assim

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \therefore Y = \overline{X}$$

Pelo resultado anterior $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$