

ONTEM

$$\begin{cases} y' = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f: E \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ f = (f_1, \dots, f_n) \end{aligned}$$

VIMOS $\begin{cases} f \\ f \end{cases} \begin{cases} \text{CONTÍNUA} \\ C^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{EXISTÊNCIA} \\ \text{EXISTÊNCIA + UNICIDADE} \end{cases}$

HOJE (f SERÁ SEMPRE C^1)

TIPOS DE PONTOS EM E :

SEJA $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ DE CLASSE C^1 , E ABERTO DE $\mathbb{R}^n$.

1) $x_0 \in E$ É UMA SINGULARIDADE SE $f(x_0) = 0$.

2) $x_0 \in E$ É REGULAR SE $f(x_0) \neq 0$.

3) $x_0 \in E$ É PERIÓDICO SE POR REGULAR ($f(x_0) \neq 0$) E SE $\exists$ UMA SOLUÇÃO MÁXIMA DE $y'(t) = f(y(t))$ T.A. $y(t_1) = y(t_2) = x_0$, $t_1 \neq t_2$.

EXEMPLOS 1) $y'(t) = Ay(t)$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

NESTE CASO, $f(y) = Ay$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($E = \mathbb{R}^n$)

• 0 É SEMPRE UMA SINGULARIDADE, POIS $A0 = 0$. $f(0) = 0$.

• x_0 É SINGULARIDADE $\Leftrightarrow f(x_0) = 0 \Leftrightarrow Ax_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 \in N(A) = \text{Ker}(A)$.

EM PARTICULAR, SE A É INVERSÍVEL, ENTÃO 0 É A ÚNICA SINGULARIDADE, POIS $N(A) = \{0\}$.

• x_0 É PONTO REGULAR $\Leftrightarrow x_0 \notin N(A)$.

$$2) y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t), \quad f(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

PONTOS SINGULARES: SOMENTE O ZERO

PONTOS REGULARES: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

PONTOS PERIÓDICOS: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

CORREÇÃO DO DIA 1 DE FEVEREIRO

DE FATO, DADO $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, ENTÃO (x_0, y_0) É REGULAR.

SEJA $R > 0$ E $\psi \in \mathbb{R}$ TAL QUE $(x_0, y_0) = (R \cos \psi, -R \sin \psi)$.

LOGO $y(t) = (R \cos(\psi+t), -R \sin(\psi+t))$ É SOLUÇÃO DE $y' = Ay$, $y(0) = (x_0, y_0)$.

ALÉM DISSO $y(0) = (R \cos \psi, -R \sin \psi) = (x_0, y_0)$

$$y(2\pi) = (R \cos(\psi+2\pi), -R \sin(\psi+2\pi)) = (R \cos(\psi), -R \sin(\psi)) = (x_0, y_0)$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y' = Ay, \quad f(y) = Ay.$$

SEJA $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ E $\psi \in \mathbb{R}$ T.A.

$$(x_0, y_0) = (R \cos \psi, R \sin \psi)$$

PONTOS SINGULARES : $\{0\}$

PONTOS REGULARES : $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

PONTOS PERIÓDICOS : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \{0\} = \{(x_0, y_0, 0); (x_0, y_0) \neq (0, 0)\}$.

$$y(0) = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow e^{tA} y(0) = (R \cos(\psi+t), R \sin(\psi+t), e^t z_0)$$

$$z_0 \neq 0 \quad e^{t_1} z_0 \neq e^{t_2} z_0 \Rightarrow y(t_1) \neq y(t_2) \Rightarrow \{(x_0, y_0, z_0); z_0 \neq 0\} \text{ N\~AO PERIÓDICOS}$$

$$z_0 = 0, (x_0, y_0) \neq (0, 0) \Rightarrow y(t) = (R \cos(\psi+t), R \sin(\psi+t), 0) \\ \Rightarrow (x_0, y_0, 0) \text{ É PERIÓDICO} \quad y(0) = y(2\pi)$$

PONTOS SINGULARES

PROPOSIÇÃO: SEJA $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$. LOGO

1) $y(t) = \text{CONSTANTE} \Leftrightarrow f(y_0) = 0$ (SINGULARIDADES = PONTOS FIXOS)

2) $f(y_0) \neq 0 \Leftrightarrow f(y(t)) \neq 0, \forall t \Leftrightarrow \exists \bar{t}$ T.A. $f(y(\bar{t})) \neq 0$
y. REGULAR TODOS y(t) SÃO REGULARES $\exists y(\bar{t})$ REGULAR.

DEMO: 1) $(\Rightarrow)$ $y(t) = \text{CONSTANTE} \Rightarrow f(y_0) = f(y(0)) = y'(0) = (\text{CONSTANTE})' = 0$.

$(\Leftarrow)$ $y(t) = y_0$, $\forall t$ É A SOLUÇÃO, POIS $y(0) = y_0$ É

$$y'(t) = y_0' = 0 = f(y_0) = f(y(t)).$$

2) $f(y_0) \neq 0 \Rightarrow f(y(t)) \neq 0, \forall t$

ii) $f(y(t)) \neq 0, \forall t$

iii) $f(y(t)) \neq 0$, PARA ALGUM $\bar{t}$

ii) IMEDIATO. $f(y(t)) \neq 0, \forall t \Rightarrow \exists \bar{t} \text{ T. Q. } f(y(\bar{t})) \neq 0$.

i) $f(y(\bar{t})) = 0$. SEJA $z: \mathbb{R} \rightarrow E$ DADA POR $z(t) = y(\bar{t})$. Logo

$$\left\{ \begin{array}{l} z'(t) = 0 = f(y(\bar{t})) = f(z(t)) \\ z(\bar{t}) = y(\bar{t}) \end{array} \right\}$$

MAS

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(y(t)) \\ y(\bar{t}) = y(\bar{t}) \end{array} \right\}$$

z E y SÃO
SOLUÇÕES DA MESMA
EDO COM MESMAS
CONDIÇÕES INICIAIS

CONCLUÍMOS QUE $y(0) = z(0) = y(\bar{t})$.

$$\text{ASSIM } f(y_0) = f(y(0)) = f(y(\bar{t})) = 0.$$

$\Downarrow$ UNICIDADE
 $z = y$.

iii) $f(y_0) = 0 \Rightarrow y(t) = \text{CONSTANTE} \Rightarrow f(y(t)) = f(y_0) = 0, \forall t$

SE $f(y(\bar{t})) \neq 0 \Rightarrow f(y_0) \neq 0$. CASO CONTRÁRIO $f(y(t)) = 0$.

ABSURDO $\square$

CLASSIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES

DE ACORDO COM NOSSA DISCUSSÃO, VEMOS QUE $\exists$ TRÊS TIPOS DE SOLUÇÃO

DE $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$.

1) $y(t) = \text{CONSTANTE}$ ($f(y_0) = 0$ SINGULARIDADES)
INTERVALO MÁXIMO É $\mathbb{R}$.

2) $y(t)$ É PERIÓDICA ($f(y_0) \neq 0 \Rightarrow f(y(t)) \neq 0, \forall t$).
 $y(t_1) = y(t_2)$, $t_1 \neq t_2$.
INTERVALO MÁXIMO É $\mathbb{R}$ (VEREMOS A SEGUIR)

3) $y(t)$ É INJETORA ($f(y_0) \neq 0 \Rightarrow f(y(t)) \neq 0, \forall t$)
SE $t_1 \neq t_2$, ENTÃO $y(t_1) \neq y(t_2)$
INTERVALO MÁXIMO PODE SER MENOR DO QUE $\mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO: SE $y(t)$ É PERIÓDICO. Logo $y(t_1) = y(t_2)$, $t_1 \neq t_2$.

SEJA $z(t) = y(t + (t_2 - t_1))$. Logo

$$\left\{ \begin{array}{l} z'(t) = y'(t + (t_2 - t_1)) = f(y(t + (t_2 - t_1))) = f(z(t)) \\ z(t_1) = y(t_1 + t_2 - t_1) = y(t_2) = y(t_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} z \text{ É y SOLUÇÃO} \\ \text{MESMA ETD} \\ \downarrow \\ z = y. \end{array}$$

MAS $\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_1) = y(t_1) \end{array} \right.$

LOGO $y(t) = z(t) = y(t + (t_2 - t_1))$

$\Rightarrow$ SE y É PERIÓDICO, $\exists T > 0$ t.q. $y(t) = y(t + T)$

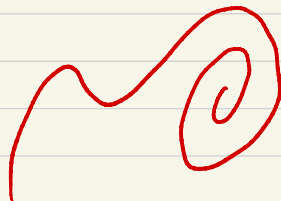
PORTANTO, COMO A SOLUÇÃO "VOLTA PARA O MESMO LUGAR",
PODEMOS ESTENDÊ-LA PARA TODO $t \in \mathbb{R}$. ASSIM O INTERVALO
MÁXIMO É $\mathbb{R}$.

ILUSTRAÇÃO

1) SOLUÇÕES CONSTANTES
 $f(y_0) = 0$

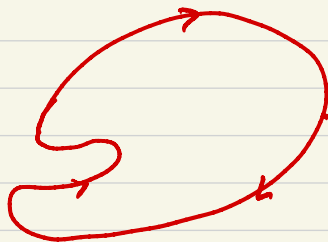
• $y(t) = y_0, \forall t$

2) SOLUÇÕES EQUILÍBRAS
 $f(y_0) \neq 0$ ($f(y(t)) \neq 0$)



$y(t_1) \neq y(t_2)$
se $t_1 \neq t_2$.

3) SOLUÇÕES PERIÓDICAS
 $f(y_0) \neq 0$ ($f(y(t)) \neq 0$)



$y(t) = y(t+T)$

SE É PERIÓDICO $y(t) = y(t+T) = y(t+2T) = \dots = y(t+kT), k \in \mathbb{Z}$.

$$T := \min \{ T > 0; y(t+T) = y(t), \forall t \in \mathbb{R} \}$$

$\hookrightarrow$ PERÍODO DA SOLUÇÃO.

+ 1 EXEMPLO: CAMPOS GRADIENTES.

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

VAMOS SUPOR QUE $\exists U: E \rightarrow \mathbb{R}$ DE CLASSE C^0 T.R. $f(y) = -\nabla U(y)$

NESTE CASO, AS SOLUÇÕES SÃO CONSTANTES OU INJETORAS.
($\nexists$ SOLUÇÃO PERIÓDICA $\Leftrightarrow \nexists$ PONTO PERIÓDICO).

DEMO: SEJA $y(t)$ UMA SOLUÇÃO. LOGO

CASO 1 $f(y(t)) = 0, \forall t \Rightarrow y(t) = \text{CONSTANTE}$

CASO 2 $f(y(t)) \neq 0, \forall t \Rightarrow y(t)$ É INJETORA OU PERIÓDICA.

COMO $f(y(t)) = -\nabla U(y(t)) \Rightarrow \nabla U(y(t)) \neq 0, \forall t$.

CONCLUÍMOS QUE $\frac{d}{dt} U(y(t)) = \langle \nabla U(y(t)), y'(t) \rangle = \langle \nabla U(y(t)), -\nabla U(y(t)) \rangle$
REGRAS DA CADEIA $= -\|\nabla U(y(t))\|^2 \leq 0$.

SE y FOR PERIÓDICA, ENTÃO $\exists t_1 \neq t_2$ T.R. $y(t_1) = y(t_2)$.

ASSIM $U(y(t_1)) = U(y(t_2))$. MAS $t \mapsto U(y(t))$ É ESTRITAMENTE DECRESCENTE. ABSURDO! , pois

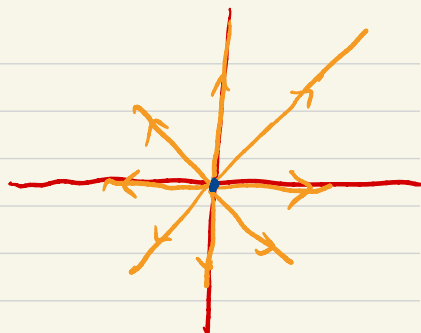
$$U(y(t_1)) < U(y(t_2)) \quad t_1 < t_2$$

$$U(y(t_1)) > U(y(t_2)) \quad t_1 > t_2$$

EXEMPLO: $U(y_1, y_2) = -\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2).$

$$f(y_1, y_2) = -\nabla U(y_1, y_2) = +(y_1, y_2)$$

$$y'(t) = f(y(t)) \Leftrightarrow y'(t) = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} y(t)$$



∄ SOLUÇÃO PERIÓDICA.

- SOLUÇÃO CONSTANTE
- ✈ SOLUÇÕES INJETORAIS

EXEMPLO $y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t)$

$$f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_2, -y_1)$$



∃ SOLUÇÃO INJETORA.

- SOLUÇÃO CONSTANTE
- ⊙ SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Como $\exists$ SOLUÇÃO PERIÓDICA $\Rightarrow \nexists U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\nabla U(y_1, y_2) = (y_2, -y_1).$$

FLUXO

CONSIDEREMOS A SEGUINTE EQUAÇÃO $y'(t) = f(y(t))$,

$f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ DE CLASSE C^1 .

SEJA $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ DADO POR

$$I(x) \subset \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (x, t) \in E \times \mathbb{R}; t \text{ PERTENCE AO INTERVALO MÁXIMO DE } \underbrace{y'(t) = f(y(t))}_{y(0) = x} \right\} \\ &= \bigcup_{x \in E} \{x\} \times I(x).\end{aligned}$$

DEFINIMOS O FLUXO DE f COMO $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ DADA

POR $\phi(x, t) = y(t)$, EM QUE $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$

NOTAÇÃO: $\phi(x, t) = \phi_t(x)$.

LOGO $y(t) = \phi_t(x)$ É SOLUÇÃO DE

IMPORTANTE: $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = \frac{d}{dt} y(t) = f(y(t)) = f(\phi(x, t))$
 $\phi(x, 0) = y(0) = x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) &= f(\phi(x, t)) \\ \phi(x, 0) &= x\end{aligned}$$

EXEMPLOS DE FLUXO

EX1) $y'(t) = Ay(t)$, $f(y) = Ay$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se $\left. \begin{array}{l} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = x \end{array} \right\} y(t) = e^{tA} x. \quad \begin{array}{l} I(x) = \mathbb{R} \\ E = \mathbb{R}^n \end{array}$

O FLUXO $\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ É DADO POR $\Phi(x, t) = e^{tA} x$
 $\downarrow$
 Ω

EX2) $y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t)$, $f(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $y(0) = (x_1, x_2)$ $\downarrow$
 E

SOLUÇÃO $y(t) = (R \cos(\psi+t), -R \sin(\psi+t))$, em

INTERVALO MÁXIMO $\mathbb{R}$

QUE $R \geq 0$, $\psi \in \mathbb{R}$ SÃO TAIS QUE

$(x_1, x_2) = (R \cos \psi, -R \sin \psi)$

$\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ DADO POR
 $\downarrow$
 Ω

$\Phi(x_1, x_2, t) = (R \cos(\psi+t), -R \sin(\psi+t))$

EX3) $y'(t) = y(t)^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(y) = y^2$.

Se $y(0) = x$, ENTÃO

$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)^2} ds = \int_0^t \frac{1}{w=y(s)} ds \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dw}{w^2} = t$

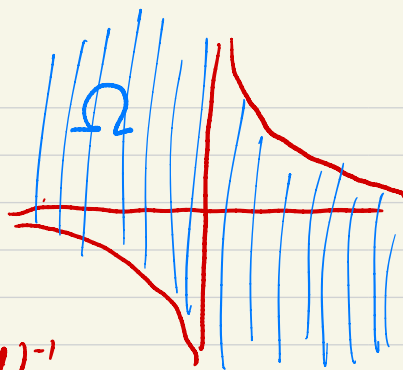
$\Rightarrow -\frac{1}{y(0)} + \frac{1}{y(t)} = t$

$\Rightarrow \frac{1}{y(t)} = t + \frac{1}{x} \Rightarrow y(t) = (t + \frac{1}{x})^{-1}$

$$\phi(x, t) = \left(\frac{1}{x} - t\right)^{-1}$$

$$I(x) = \begin{cases}]-\infty, \frac{1}{x}[& , x > 0 \\]\frac{1}{x}, +\infty[& , x < 0 \end{cases}$$

INTERVALO MÁXIMO

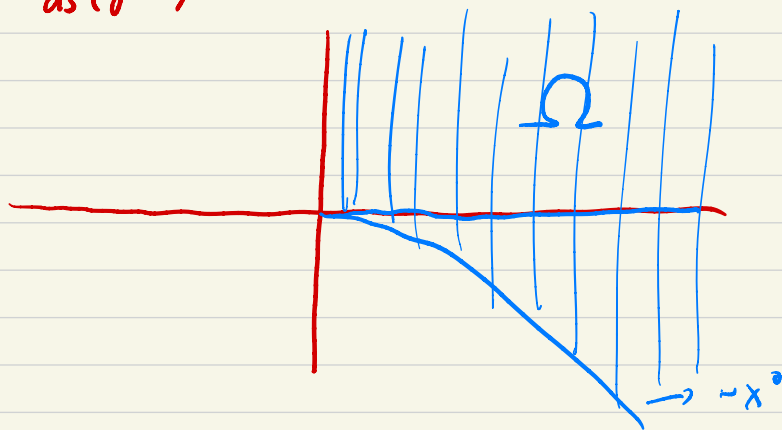


$$\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \phi(x, t) = \left(\frac{1}{x} - t\right)^{-1}$$

EX 4 $y'(t) = \frac{1}{2y(t)}$, $f(y) = \frac{1}{2y}$, $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 E

$$\int_0^t \underbrace{2y'(s)y(s)}_{\frac{d}{ds}(y(s)^2)} ds = \int_0^t ds \Rightarrow y(t)^2 - y(0)^2 = t \Rightarrow y(t) = \sqrt{x^2 + t}$$

0 INTERVALO MÁXIMO $\in]-x^2, \infty[$ + pois $E =]0, \infty[$ logo $y(t) \in E$.



FLUXO: $\phi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DADO POR $\phi(x, t) = \sqrt{t + x^2}$.

REGULARIDADE DO FLUXO:

TEO: Se $f \in C^k$, $k \geq 1$, ENTÃO

- 1) $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ É UM ABERTO
- 2) O FLUXO $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ É DE CLASSE C^k .

NOI EXEMPLOS ANTERIORES, f E ϕ SÃO C^∞ .

DOERING / LOPES