AULA PASSADA: $A = \underset{\text{DIAGONAL}}{\overset{\text{MESMOS AUTOVALORES DE } A}{D}} + \underset{\text{NILPOTENTE}}{N}$, $DN = ND$

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$$

CONCLUSÃO: QUALITATIVAMENTE PODEMOS TER INFORMAÇÕES DA SOLUÇÃO DE $Y' = AY$ ATRAVÉS DOS AUTOVALORES DE A.

ÚLTIMO COMENTÁRIO:

TEOREMA DE JORDAN (**COMPLEXA**). SEJA $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. LOGO $\exists\, P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ T.Q. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_n} \end{pmatrix}$, EM QUE J_i SÃO BLOCOS DA FORMA

I) $J_i = \begin{pmatrix} \overset{\in \mathbb{C}.}{\lambda_i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$

II) $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_i \end{pmatrix}$

LOGO $e^{tA} = \begin{pmatrix} \boxed{\exp(tJ_1)} & & & \\ & \boxed{\exp(tJ_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\exp(tJ_n)} \end{pmatrix}$

OBS: VERSÃO **REAL** VER DOERING/LOPES.

Hoje: Inicio de Problemas Não-Lineares

Problema geral $\begin{cases} y'(t) = f(t, \underset{\uparrow}{y(t)}) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$

Não consideramos t.

Estudaremos problemas da forma $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Ou seja,

$$\boxed{\begin{cases} y_1'(t) = f_1(y_1(t), \dots, y_n(t)) & y_1(0) = \bar{y}_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_n'(t) = f_n(y_1(t), \dots, y_n(t)) & y_n(0) = \bar{y}_n . \end{cases}}$$

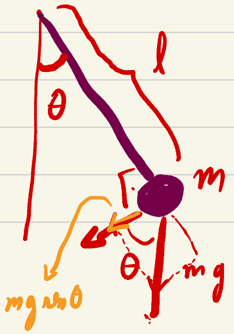
A função $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamado de campo de vetores

Aqui E é um aberto. $f(y_1, \dots, y_n) = (f_1(y_1, \dots, y_n), f_2(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n))$.

Exemplo 1 $f_j(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k$, $a_{jk} \in \mathbb{R}$, então

$$y_j'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k, \ \forall j \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y}$$

Exemplo 2 Pêndulo



Velocidade $l\theta'$

Aceleração $l\theta''$

Forças $\underbrace{-mg\sin\theta}_{\text{Gravidade}} \underbrace{- b l \theta'}_{\text{Resistência do ar.}}$

2ª LEI DE NEWTON $F = ma$

$$\boxed{ml\theta'' = -mg \operatorname{sen}\theta - bl\theta'}$$

VAMOS TRANSFORMAR O PROBLEMA NUM SISTEMA DE 1º ORDEM

VARIÁVEIS θ E $\underset{\omega}{\underset{\parallel}{\theta'}}$. CHAMAREMOS ω DE θ'.

$$\theta' = \omega$$
$$\omega' = \theta'' = -\frac{mg}{ml}\operatorname{sen}\theta - \frac{bl}{ml}\theta' = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}\theta' = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}\omega.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta \\ \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}\omega\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f_1(\theta,\omega) &= \omega \\ f_2(\theta,\omega) &= -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}\omega \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(\theta,\omega) = \left(\omega, -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}\omega\right)$ É CAMPO DE VETORES.

CURIOSIDADE: SE θ É PEQUENO $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, ENTÃO

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta \\ \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -g/l & -\frac{b}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega \\ \theta\end{pmatrix}$$

É OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO.

$$-\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \approx -\frac{g}{l}\theta$$

EXISTÊNCIA E UNICIDADE

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad f : E \underset{\hookrightarrow \text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (P).$$

EXISTÊNCIA: (CAUCHY-PEANO). SE f É CONTÍNUA, ENTÃO PARA TODO $y_0 \in E$, $\exists$ $y :]a,b[\to E \subset \mathbb{R}^n$, $a<0<b$, T.Q. y É SOLUÇÃO DO PROBLEMA (P)

EXISTÊNCIA E UNICIDADE: (PICARD-LINDELÖF). SE f É C^1, ENTÃO PARA TODO $y_0 \in E$, EXISTE UMA ÚNICA FUNÇÃO $y :]a,b[\to E$, $a<0<b$ T.Q. y É SOLUÇÃO DE (P).

RECORDAÇÃO: UMA FUNÇÃO $f : E \to \mathbb{R}^n$ É DE CLASSE C^1 SE

i) f É CONTÍNUA

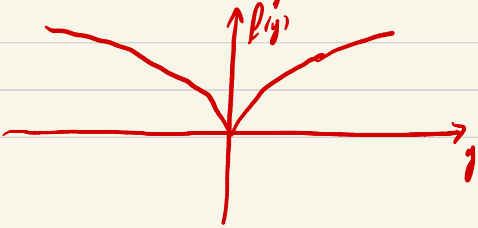
ii) $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $\forall x \in E$, $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$.

iii) AS FUNÇÕES $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : E \to \mathbb{R}$ SÃO CONTÍNUAS

C^1 = FUNÇÃO CONTÍNUA COM DERIVADAS (DE 1ª ORDEM) CONTÍNUAS.

EXEMPLO (CLÁSSICO): $\begin{cases} y'(t) = 3\,|y(t)|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad y :]a,b[\to \mathbb{R}$.

NESTE CASO, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(y) = 3\,|y|^{2/3}$. É CONTÍNUA,



$$f'(y) = \begin{cases} 2y^{-1/3}, & y>0 \\ -2|y|^{-1/3}, & y<0 \end{cases}$$

f É CONTÍNUA, MAS f NÃO É C^1.

ASSIM
$$\begin{cases} y'(t) = 3|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
TEM SOLUÇÃO, MAS PODE NÃO SER ÚNICA.

EXEMPLOS DE SOLUÇÃO:

1) $\boxed{y(t) = 0}$ É SOLUÇÃO, POIS $y'(t) = 0 = 3|0|^{2/3} = 0$ ✓

$y(0) = 0$

2) VAMOS PROCURAR OUTRA SOLUÇÃO.

SUPONDO QUE $y(t) > 0$, $t > 0$. ENTÃO

$$y'(t) = 3y(t)^{2/3}, \quad t > 0$$

$$\frac{y'(t)}{3y(t)^{2/3}} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{y'(s)ds}{3y(s)^{2/3}} = \int_0^t 1 ds = t$$

$w = y(s)$

$dw = y'(s)ds$

$$\downarrow$$

$$\int_{y(0)=0}^{y(t)} \frac{dw}{3w^{2/3}} = t \rightarrow w^{1/3}\Big|_0^{y(t)} = t$$

$$\frac{1}{3}w^{-2/3} \qquad \frac{1}{3}\frac{1}{1/3}w^{1/3} = w^{1/3}$$

$$y(t)^{1/3} - 0 = t \Rightarrow y(t) = t^3.$$

LOGO $\boxed{y(t) = \begin{cases} t^3, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}}$ É SOLUÇÃO.

DE FATO $\quad y'(t) = (t^3)' = 3t^2 = 3(t^3)^{2/3}, \quad t \geq 0$ ✓

$\qquad\qquad\quad y'(t) = 0 = 3(0)^{2/3}, \quad t \leq 0$

NÃO TEMOS UNICIDADE!

PROPRIEDADE DE TRANSLAÇÃO

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(\bar{t}) = y_0 \end{cases}, \quad f \in C^1(E;\mathbb{R}^n) \quad (f: E \to \mathbb{R}^n \text{ e } f \text{ é } C^1).$$

SEJA $y:]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon[\to E$ UMA SOLUÇÃO. LOGO $z:]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ DEFINIDA COMO $z(t) = y(t + \bar{t})$ É SOLUÇÃO DE

$$\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = y_0 \end{cases}, \text{ POIS } \quad z'(t) = y'(t+\bar{t})\frac{d}{dt}(t+\bar{t}) = y'(t+\bar{t}).$$

LOGO $\quad z'(t) = y'(t+\bar{t}) = f(y(t+\bar{t})) = f(z(t))$

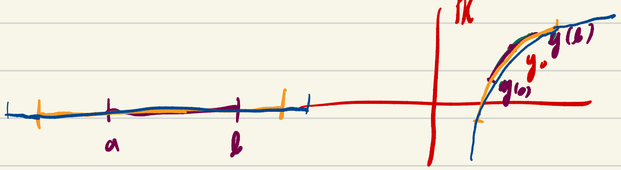
$\qquad\quad z(0) = y(0+\bar{t}) = y(\bar{t}) = y_0$

LOGO ESTUDAR EQUAÇÕES COM CONDIÇÕES INICIAIS EM $t=0$ NÃO TEM PERDA DE GENERALIDADE.

INTERVALO E SOLUÇÃO MÁXIMAS

CONSIDEREMOS $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$. VAMOS SUPOR $f: E \to \mathbb{R}^n$ É C^1.

PODEMOS MOSTRAR QUE ∃ UMA SOLUÇÃO DEFINIDA NO MAIOR INTERVALO POSSÍVEL.



∃ UM INTERVALO MÁXIMO POSSÍVEL.

PROPOSIÇÃO: DADO $y_0 \in E$, ∃ UMA SOLUÇÃO $y: J \to E$, $J \subset \mathbb{R}$ UM CONEXO QUE CONTÉM 0, TAL QUE

1) y É SOLUÇÃO DE $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

2) SE $\underset{0 \in I}{z: I \to E}$ FOR SOLUÇÃO DE $\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(0) = y_0 \end{cases}$, ENTÃO $I \subset J$ E $y|_I = z$.

NESTE CASO, J É INTERVALO MÁXIMO E y É SOLUÇÃO MÁXIMA.

EXEMPLOS: 1) $\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) = y^2$. f É C^∞. LOGO TEMOS EXISTÊNCIA E UNICIDADE.

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)^2}\, ds = \int_0^t ds \Leftrightarrow \int_{\underset{\underset{1}{\|}}{y(0)}}^{y(t)} \frac{dw}{w^2} = t \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t$$

$\downarrow$

$-\frac{1}{w}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{y(t)} = \underset{\overset{\|}{1}}{\frac{1}{y(0)}} - t$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

OBSERVAMOS $\frac{1}{1-t} \nearrow \infty$, $t \to 1$.

LOGO O INTERVALO MÁXIMO É $]-\infty, 1[$.
A SOLUÇÃO MÁXIMA É $y:]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ DADA POR $y(t) = \frac{1}{1-t}$.

$\forall$ OUTRA SOLUÇÃO É DA FORMA $z:]a, b[\to \mathbb{R}$, $a \geq -\infty$, $b \leq 1$

$$z(t) = (1-t)^{-1}.$$

EXEMPLO 2: $\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

NESTE CASO $y(t) = e^{tA} y_0$ ESTÁ DEFINIDA $\forall t \in \mathbb{R}$.

O INTERVALO MÁXIMO É $\mathbb{R}$.
A SOLUÇÃO MÁXIMA É $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = e^{tA} y_0$

O INTERVALO MÁXIMO DE PROBLEMAS LINEARES É $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 3 $\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

NESTE CASO, $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(y) = \frac{1}{2y}$. $f \in C^\infty$ (PORTANTO C^1).

TEMOS EXISTÊNCIA E UNICIDADE.

$$2y(t)y'(t) = 1 \Rightarrow \int_0^t 2y(s)y'(s)ds = \int_0^t ds$$

$w = y(s)$
$dw = y'(s)ds$

$$\int_{y(0)}^{y(t)} 2w\,dw = t \Leftrightarrow w^2 \Big|_1^{y(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow y(t)^2 - 1 = t \qquad y(t) = \sqrt{1+t}$$

$$\boxed{y(t) = \sqrt{1+t}}$$

SE $t < -1$, $y(t) \notin \mathbb{R}$.

O INTERVALO MÁXIMO É $]-1, \infty[$

A SOLUÇÃO MÁXIMA É $y :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $y(t) = \sqrt{1+t}$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DAS ÓRBITAS

SEJA $y : J \to \mathbb{R}^n$ A SOLUÇÃO MÁXIMA DE $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, f C^1.

A ÓRBITA DE y É, POR DEFINIÇÃO, A IMAGEM DE y.

$$\mathcal{O}_{y_0} := y(J) = \operatorname{Im} y$$

EXEMPLOS 1) $\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

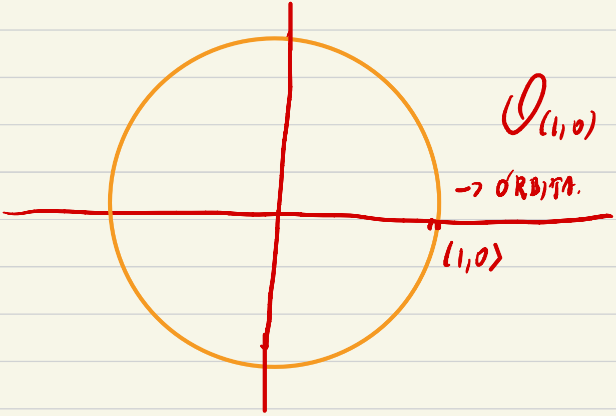
A SOLUÇÃO MÁXIMA É $(y_1, y_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^t$.

$\mathcal{O}_{(1,1)}$

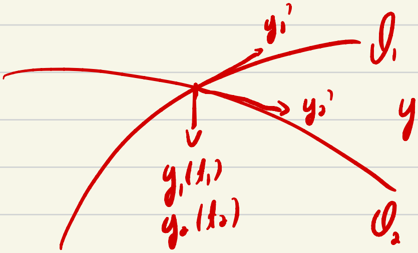
EXEMPLO 2

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$



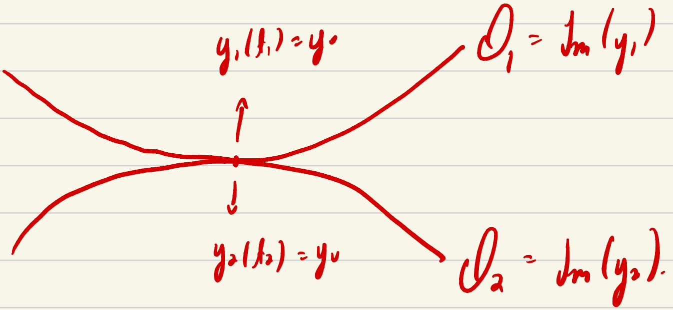
O QUE NÃO PODE OCORRER.



$y_1'(t_1) \neq y_2'(t_2)$

NÃO OCORRE

$$y_1'(t_1) = f(y_1(t_1)) = f(y_2(t_2)) = y_2'(t_2)$$



NOTE QUE y_1 É SOLUÇÃO DE $y_1' = f(y_1)$, $y_1(t_1) = y_0$

MAS

$y(t) = y_2(t + (t_2 - t_1))$,

ENTÃO $y(t_1) = y_2(t_2) = y_0$

E $y'(t) = f(y(t))$

LOGO POR UNICIDADE

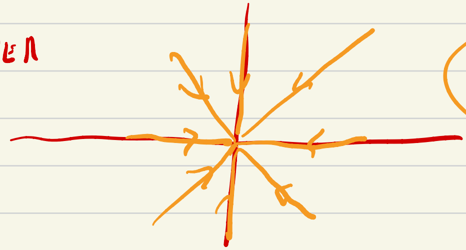
$$y_2(t + (t_2 - t_1)) = y_1(t)$$

POIS AMBOS SÃO SOLUÇÕES DE $\begin{cases} z'(t) = f(z(t)) \\ z(t_1) = y_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{Im}\, y_2 = \text{Im}\, y_1 \Rightarrow \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2.$$

SE f É C^1, ENTÃO AS ÓRBITAS NUNCA SE CRUZAM

PODE OCORRER



MAS ELAS NÃO SE CRUZAM.