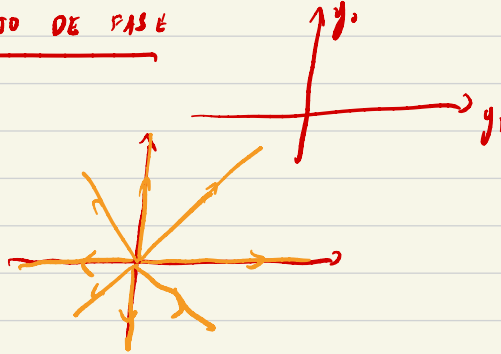


## AULA PASSADA

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

ESTUDAMOS QUALITATIVAMENTE AS POSSÍVEIS SOLUÇÕES  
DESSEHAMOS O RETRATO DE FASE

EX:  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

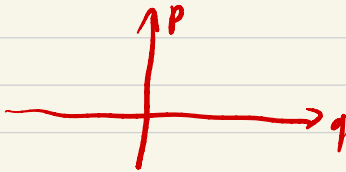


APLICAÇÃO: MOLLA

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\begin{aligned} q &= x \\ p &= m\dot{x} \end{aligned}$$

DETERMINAMOS



# HOJE

• ESTUDAR QUALITATIVAMENTE SISTEMAS  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$Y'(t) = AY(t)$$

• APLICAÇÃO: SISTEMA DE 2 MOLAS.

RECORDAÇÃO: (TALVEZ NOVIDADE).

DEFINIÇÃO: UMA MATRIZ  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  É NILPOTENTE SE  $A^k = 0$

PARA ALGUM  $k \in \mathbb{N}_0$ .

EXEMPLO: i)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^1 = 0$

ii)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = 0$   $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = 0$   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) SE  $A$  É INVERSÍVEL, ENTÃO  $A$  NÃO É NILPOTENTE, POIS  $A^k$  SEM INVERSÍVEL ( $\det A^k = (\det(A))^k \neq 0$ ). Logo  $A^k \neq 0$ .

PRECISAMOS USAR  $\mathbb{C}$ .

TEOREMA: (CAP. 6 HOFFMANN-KUNZE) SEJA  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . LOGO  $\exists$  MATRIZES

$D \in \mathbb{N}$  TAIS QUE

$$i) A = D + N$$

$$ii) DN = ND$$

iii) D É DIAGONALIZÁVEL, ISTO É,  $\exists P \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  INVERSÍVEL T.Q.  $P^{-1}DP = B$ , B MATRIZ DIAGONAL. OS ELEMENTOS DA DIAGONAL DE B SERÃO FORMADOS DE TODOS OS AUTOVALORES DE A (PODE TER REPETIÇÃO).

EXEMPLO:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$

$$DN = ND = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

AUTOVALORES DE A: RAÍZES DE  $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$   
 $= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$   
 $\Rightarrow$  RAÍZES SÃO 2 E 3

---

○ QUE PODEMOS DIZER DE  $Y'(t) = AY(t)$ . ?

LEMBRAMOS QUE  $Y(t) = e^{tA} Y(0)$

$$e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD} e^{tN} = e^{tPAP^{-1}} e^{tN} = P e^{tB} P^{-1} e^{tN}.$$

↑  
USAMOS  
O TEO.  
ANTERIOR

↑  
POIS  
 $DN = ND$ .

↓  
 $P^{-1}DP = B$   
↓  
 $D = PBP^{-1}$

↓  
FÁCIL TAMBÉM FÁCIL  
DE CALCULAR DE CALCULAR

COMO CALCULAR  $e^{tB}$  E  $e^{tN}$ ?

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \text{ PODE SER IGUAL A } \lambda_j) \quad e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$N$  NILPOTENTE.  $N^k = 0 \Rightarrow N^l = 0, \forall l \geq k$ .

$$e^{tN} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (tN)^j = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} t^j N^j.$$

CONSEQUÊNCIAS DESTES RESULTADOS:

CONSEQUÊNCIA 1:  $Y'(t) = AY(t), Y(0) = Y_0$ , ENTÃO A SOLUÇÃO  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$  SERÁ TAL QUE  $y_j(t)$  É COMBINAÇÃO LINEAR DE TERMOS  $\omega(\omega t) t^k e^{at}$  E  $\omega(\omega t) t^k e^{at}$ ,  $a, \omega \in \mathbb{R}$ . (AQUI  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ )

$\downarrow$  PARTE IMAGINÁRIA DOS AUTOVALORES  
 $\downarrow$  PARTE REAL DOS AUTOVALORES

DEMO:  $Y(t) = e^{tA} Y_0 = P e^{tB} P^{-1} e^{tN} Y_0 \Rightarrow Y(t)$  É COMBINAÇÃO LINEAR DE TERMOS  $t^k e^{t\lambda_i}$ ,  $\lambda_i$  AUTOVÁLUAS DE  $A$ .

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 NÚMEROS COMPLEXOS  $t^k$

MAS  $A$  É REAL.  $\Rightarrow Y(t)$  É REAL  $\Rightarrow Y(t)$  É COMBINAÇÃO LINEAR DE TERMOS  $t^k e^{t\lambda_i}$

$t^k e^{t\lambda_i} \omega(\lambda_i t)$   
 $t^k e^{t\lambda_i} \omega(\lambda_i t)$

EXEMPLO: i)  $\exp\left(t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}\right) \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$



AS SOLUÇÕES DO PROBLEMA  $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 3y_3 \end{cases}$  SÃO COMBINAÇÕES LINEARES DE  $te^{2t}, e^{2t}, e^{3t}$ .

$y' = Ay$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

EX:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$   $e^{tA} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$

LOGO AS SOLUÇÕES SÃO COMBINAÇÕES LINEARES DE  $e^{ta} \cos(bt)$ ,  $e^{ta} \sin(bt)$ .  
PORTE REAL DOS AUTOVALORES  
 PARTE IMAGINÁRIA

(AUTOVALORES DE A SÃO DADOS POR  $\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ b & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 + b^2 = 0$   
 $\Rightarrow \lambda_{\pm} = a \pm ib$ )

CONSEQUÊNCIA 2: SE A PARTE REAL DE TODOS OS AUTOVALORES

FOR NEGATIVA, ENTÃO  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$ .

DEMO:  $Y(t)$  É COMBINAÇÃO LINEAR DE  $t^h e^{at} \cos(\omega t + \phi)$

SABEMOS QUE  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{t^h}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{at}}_{\text{LIMITADO}} \cos(\omega t + \phi) = 0$ . LOGO  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$ .  
PORTE REAL DOS AUTOVALORES

PODEMOS SABER ATÉ A VELOCIDADE EM QUE  $Y(t) \rightarrow 0$ .

DE FATO, SEJA

$$\lambda := \sup \{ \operatorname{Re} \lambda_i, \lambda_i \text{ AUTOVALOR DE } A \}$$

SE  $A$  É DIAGONALIZÁVEL  $P^{-1}AP = D \Rightarrow e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$ .

LOGO  $Y(t)$  É COMBINAÇÃO LINEAR DE  $e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} \omega(\operatorname{Im} \lambda_i t + \phi)$

$$\|Y(t)\| \leq \text{SOMA DE TERMOS } |e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} \omega(\operatorname{Im} \lambda_i t + \phi)| \leq C e^{\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^n |y_j(t)|$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq \lambda.$$

DIAGONALIZÁVEL

NO CASO GERAL, DADO  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists C_\varepsilon > 0$  T.Q.  $\|Y(t)\| \leq C_\varepsilon e^{(\lambda + \varepsilon)t}$ .

GERAL

DEFATO,  $Y(t)$  É COMBINAÇÃO LINEAR DE  $t^h e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} \omega(\operatorname{Im} \lambda_i t + \phi)$

BASTA OBSERVAR QUE  $t^h \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ ,  $t \geq 0$ . ASSIM.

$$e^{\operatorname{Re} \lambda_i t} \leq e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$\underbrace{|t^h e^{\operatorname{Re} \lambda_i t}|}_{\leq e^{\varepsilon t} C_\varepsilon} \underbrace{\omega(\operatorname{Im} \lambda_i t + \phi)}_{\text{LIMITADO}} \leq C_\varepsilon e^{(\lambda + \varepsilon)t}.$$

CUIDADO: NÃO PODEMOS SEMPRE TOMAR  $\varepsilon = 0$ .

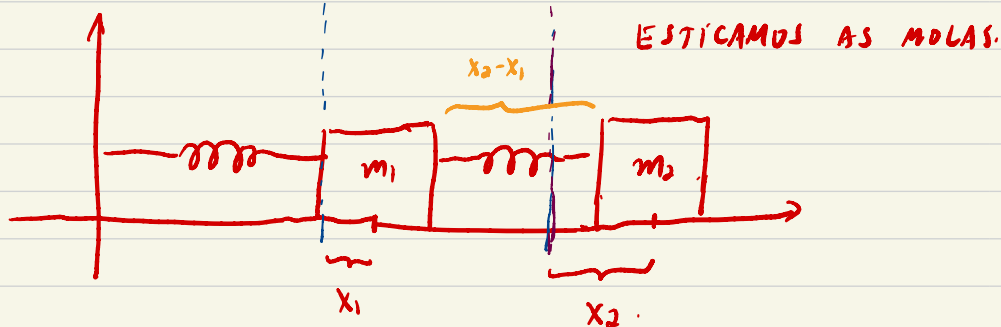
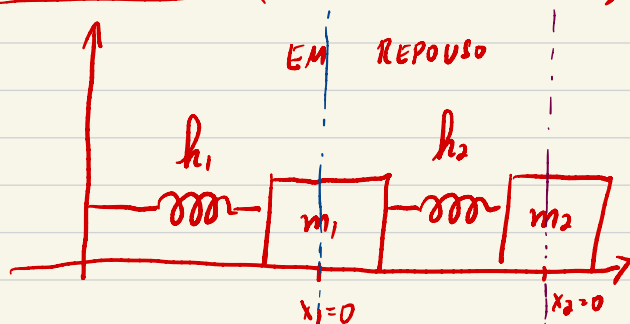
$$\text{EX: } Y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_A Y(t) \Rightarrow Y(t) = e^{tA} Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0.$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 + t \bar{y}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \quad \bar{y}_2 \neq 0 \Rightarrow \|Y(t)\| \rightarrow \infty$$



# APLICAÇÃO

## DUAS MOLAS (DOERING/LOPEZ)



QUAIS SÃO AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DAS MOLAS?

FORÇAS EM  $m_2$  :  $\underbrace{-k_2(x_2 - x_1)}_{\text{LEI DE HOOKE}} - \underbrace{b_2 \dot{x}_2}_{\text{RESISTÊNCIA DO AA, } b_2 > 0}$

FORÇAS EM  $m_1$  :  $\underbrace{-k_1 x_1}_{\text{FORÇA MOLAS 1}} + \underbrace{k_2(x_2 - x_1)}_{\text{FORÇA MOLAS 2}} - \underbrace{b_1 \dot{x}_1}_{\text{RESISTÊNCIA DO AA, } b_1 > 0}$

2º LEI DE NEWTON  $F = ma$ .

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -(k_2 + k_1)x_1(t) + k_2 x_2(t) - b_1 \dot{x}_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = +k_2 x_1(t) - k_2 x_2(t) - b_2 \dot{x}_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= \dot{x}_1 \\ y_3 &= x_2 \\ y_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned} \quad \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_Y = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_3 - \frac{b_1}{m_1} y_2 \\ y_4 \\ \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_3 - \frac{b_2}{m_2} y_4 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \dot{x}_1 \quad Y$$

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\frac{k_1+k_2}{m_1}) & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix}}_A Y(t)$$

$$Y(t) = e^{tA} Y_0.$$

USANDO O QUE FIZEMOS HOJE PODEMOS ENTENDER  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t)$ .

PARA SIMPLIFICAR,  $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = b_1 = b_2 = 1$ .

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} Y(t).$$

VAMOS CALCULAR AUTOVALORES

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

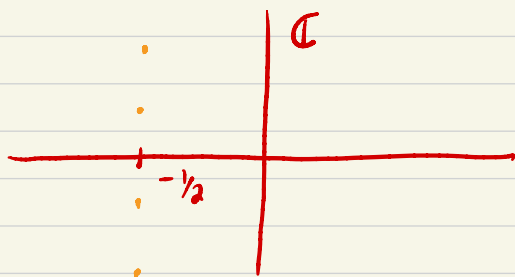
$$\det(B) = \sum_{j=1}^4 (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(1|j)$$

$$\lambda \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

CONCLUSÃO  $p_A(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 1$

RAÍZES (WOLFRAM)  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$



AUTOVALORES EM  
LARANJA

OS RESULTADOS DE HOJE DIZEM  $\|Y(t)\| \leq C e^{-\frac{1}{2}t}$

CONCLUSÃO:  $|x_1(t)|, |\dot{x}_1(t)|, |x_2(t)|, |\dot{x}_2(t)| \leq C e^{-\frac{1}{2}at}$ .

A POSIÇÃO E A VELOCIDADE DE  $m_1$  E  $m_2$  VÃO A ZERO.

AS MOLAS VÃO AO EQUILÍBRIO!