Lista 10 - Identificação de quádricas e cônicas. - Gabarito

1. Identifique e desenhe a gráfica da equação $-25x^2 + 9y^2 + 225 = 0$.

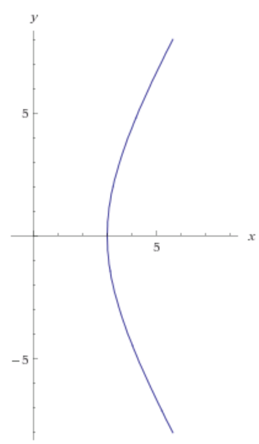
   Como não há termos mistos e termos lineares, basta isolar os termos quadráticos. Assim:

   $$-25x^2 + 9y^2 = -225.$$

   Dividindo todos os membros da equação por (-225), tem-se:

   $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1,$$

   que representa a equação de uma hipérbole.



Hipérbole

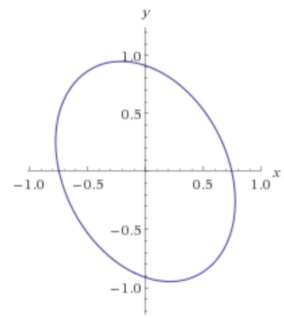
2. Faça uma rotação de eixos e identifique a cônica na equação $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$, escrever a equação na forma canônica.

   A matriz da forma quadrática é: $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Diagonalizando a matriz A, $D = P^{-1}AP$. Tem-se que

   $$5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 - 5 = 0.$$

   $$5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow \bar{x}^2 + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

   A cônica é uma elipse.



Elipse

3. Identifique e desenhe a cônica $6x^2+9y^2-4xy-4\sqrt{5}x-18\sqrt{5}y-5=0$. Qual a equação canônica?

   A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Os termos lineares serão obtidos da transformação $X = P\bar{X}$. Temos, então,

   Os autovetores (na forma unitária) associados à matriz A são $\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 + \sqrt{5}\begin{bmatrix} -4 & -18 \end{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - 5 = 0$$

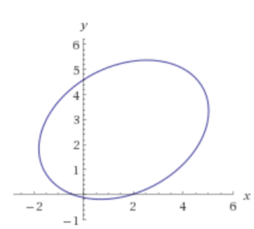
$$5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 - 26\bar{x} - 32\bar{y} - 5 = 0$$

   Completando quadrados,

$$\frac{(\bar{x}-\frac{13}{5})^2}{\frac{1432}{500}} + \frac{(\bar{y}-\frac{16}{10})^2}{\frac{1432}{1000}} = 1.$$

$$\frac{\hat{x}^2}{\frac{1432}{500}} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{1432}{1000}} = 1.$$

   A cônica é uma elipse, em que $\begin{cases} \hat{x} = \bar{x} - \frac{13}{5} \\ \hat{y} = \bar{y} - \frac{16}{10} \end{cases}$.



Elipse

4. Identifique e desenhe a cônica $8x^2+8y^2-16xy+33\sqrt{2}x-31\sqrt{2}y+70=0$.

   A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A=\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Os termos lineares serão obtidos da transformação $X=P\bar{X}$.

   Os autovetores (na forma unitária) associados à matriz A são $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$16\bar{y}^2+\sqrt{2}\begin{bmatrix} 33 & -31 \end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}+70=0$$

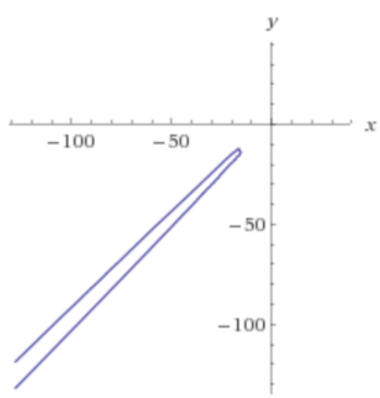
$$16\bar{y}^2+2\bar{x}-64\bar{y}+70=0$$

   Completando quadrados,

$$16(\bar{y}-2)^2=-2\bar{x}-70+64$$

$$(\bar{y}-2)^2=-\frac{1}{8}(\bar{x}+3)$$

   A equação é de uma parábola, em que $\begin{cases} \hat{x}=\bar{y}-2 \\ \hat{y}=\bar{x}+3 \end{cases}$. A equação canônica é $\hat{x}^2=-\frac{1}{8}\hat{y}$.



Parábola

5. Identifique a quádrica na equação $x^2+y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz=16$.

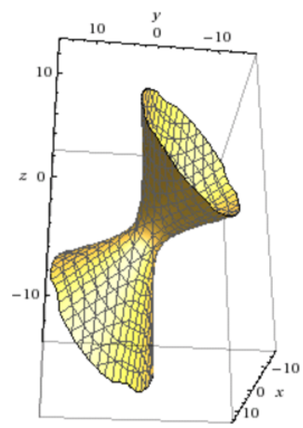
   A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz

P é composta pelos autovetores unitários). Dessa forma, a equação dada será composta pelos autovetores da matriz diagonal.

$$D = P^{-1}AP.$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, $2\bar{x}^2 - 2\bar{y}^2 + 4\bar{z}^2 - 16 = 0 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{8} - \frac{\bar{y}^2}{8} + \frac{\bar{z}^2}{4} = 1$. A equação é de um hiperboloide de uma folha.



Hiperboloide de uma folha

6. Identifique a quádrica na equação $4x^2 - y^2 + z^2 - 16x + 8y - 6z + 16 = 0$. Desenhe.
Como há apenas termos quadráticos e termos lineares, basta completar quadrados. Assim,

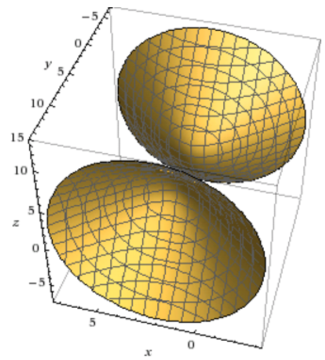
$$4(x^2 - 4x + 4 - 4) - (y^2 - 8y + 16 - 16) + (z^2 - 6z + 9 - 9) = -16$$

$$4(x-2)^2 - (y-4)^2 + (z-3)^2 = -7$$

$$\frac{(y-4)^2}{7} - \frac{(x-2)^2}{\frac{7}{4}} - \frac{(z-3)^2}{7} = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{7} - \frac{\bar{y}^2}{\frac{7}{4}} - \frac{\bar{z}^2}{7} = 1$$

A equação é de um hiperboloide de duas folhas, onde $\begin{cases} \bar{x} & = & y - 4 \\ \bar{y} & = & x - 2 \\ \bar{z} & = & z - 3 \end{cases}$.



Hiperboloide de duas folhas

7. Identifique e escreva a equação canônica da quádrica $2x^2+2y^2+4z^2-4xy-8xz-8yz+8x-15=0$.

A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Os termos lineares serão obtidos da transformação $X = P\bar{X}$.

Os autovetores (na forma unitária) associados à matriz A são $r\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$4\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 + 8\bar{z}^2 + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} - 15 = 0$$

$$4\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 + 8\bar{z}^2 - 4\sqrt{2}\bar{x} + \frac{8}{3}\sqrt{3}\bar{y} - \frac{4}{3}\sqrt{6}\bar{z} - 15 = 0$$

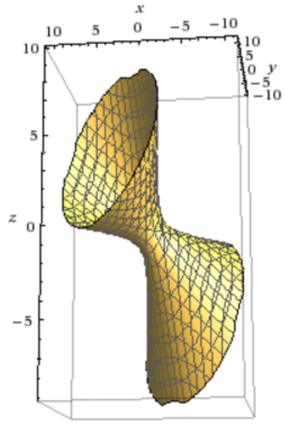
Complementando quadrados,

$$4\left(\bar{x}^2 - \sqrt{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\right) - 4\left(\bar{y}^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\bar{y} + \frac{1}{3}\right) + 8\left(\bar{z}^2 - \frac{1}{6}\sqrt{6}\bar{z} + \frac{1}{24}\right) = 16$$

$$4\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(\bar{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8\left(\bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 = 16$$

$$\frac{\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(\bar{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2}{2} = 1$$

A quádrica representa um hiperboloide de uma folha, onde $\begin{cases} \hat{x} &= \bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hat{y} &= \bar{y} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hat{z} &= \bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{12} \end{cases}$.



Hiperboloide de uma folha

8. Identifique e escreva a equação canônica da quádrica $x^2+y^2-2z^2+2xy+8xz+8yz+3x+z=0$.

A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Os termos lineares serão obtidos da transformação $X=P\bar{X}$.

Os autovetores (na forma unitária) associados à matriz A são $r\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

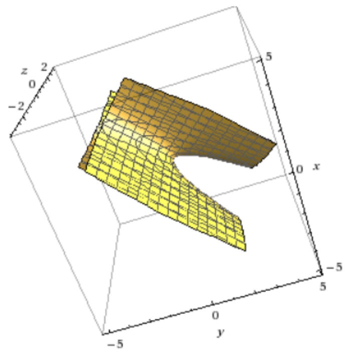
$$6\bar{y}^2-6\bar{z}^2+\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}=0$$

Completando quadrados,

$$6(\bar{y}+\frac{\sqrt{3}}{9})^2-6(\bar{z}+\frac{\sqrt{6}}{72})^2=\frac{3\sqrt{2}}{2}\bar{x}+\frac{1116}{5184}$$

$$\frac{(\bar{y}+\frac{\sqrt{3}}{9})^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}}-\frac{(\bar{z}+\frac{\sqrt{6}}{72})^2}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=(\bar{x}+\frac{372\sqrt{2}}{5184})$$

A equação em questão é de um paraboloide hiperbólico, onde $\begin{cases} \hat{x} &= \bar{y}+\frac{\sqrt{3}}{9} \\ \hat{y} &= \bar{z}+\frac{\sqrt{6}}{72} \\ \hat{z} &= \bar{x}+\frac{372\sqrt{2}}{5184} \end{cases}$.



Paraboloide hiperbólico

9. Identifique e escreva a equação canônica da quádrica $2x^2+3y^2+3z^2-2yz+2x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z-\frac{3}{8}=0$.

A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Os termos lineares serão obtidos da transformação $X = P\bar{X}$.

Os autovetores (na forma unitária) associados à matriz A são $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$4\bar{x}^2+2\bar{y}^2+2\bar{z}^2+\sqrt{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \frac{3}{8}$$

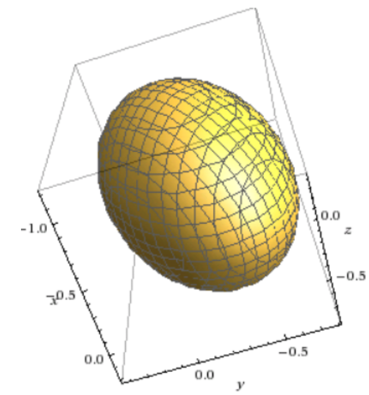
$$4\bar{x}^2+2\bar{y}^2+2\bar{z}^2+\bar{y}+2\bar{z} = \frac{3}{8}$$

Completando quadrados,

$$4\bar{x}^2+2(\bar{y}^2+\frac{1}{2}\bar{y}+\frac{1}{16})+2(\bar{z}^2+\bar{z}+\frac{1}{4}) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(\bar{y}+\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(\bar{z}+\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

A equação é de um elipsoide, onde $\begin{cases} \hat{x} = \bar{x} \\ \hat{y} = \bar{y}+\frac{1}{4} \\ \hat{z} = \bar{z}+\frac{1}{2} \end{cases}$.



Elipsoide

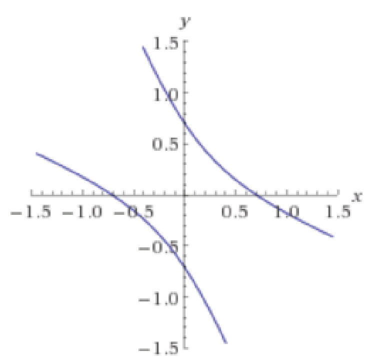
10. Seja $2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$ a equação de uma cônica. Diagonalize e identifique a cônica.

A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Dessa forma, a equação dada será composta pelos autovetores da matriz diagonal.

$$5\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{5}} - \bar{y}^2 = 1$$

A equação em questão é de uma hipérbole.



Hipérbole