

Lista 5 - Gabarito

June 9, 2020

1. Considere os seguintes conjuntos de vetores. Quais deles são subespaços de \mathbb{R}^4 ?

(a) (x, y, z, w) tais que $x - y = 2$.

Resolução:

Sabemos que $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) / x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial.

A pergunta é sobre o conjunto $C = \{(x, y, z, w) / x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ e } x - y = 2\} \subset \mathbb{R}^4$.

Observar:

Os elementos de C tem quatro componentes e além disso a diferença da sua primeira componente menos a segunda componente deve ser igual a 2.

Sobre a terceira e quarta componente nada é exigido.

Para verificar que C é sub-espaço vetorial bastará validar as propriedades A1 e M1 de um espaço vetorial (Vide slides de Espaço Vetorial).

Verificando A1: Sejam $u, v \in C$ então $u + v \in C$.

Por serem elementos de C eles possuem quatro componentes e devem satisfazer a condição dada.

Então $u = (x_u, y_u, z_u, w_u)$ com $x_u - y_u = 2$ e $v = (x_v, y_v, z_v, w_v)$ com $x_v - y_v = 2$.

Para satisfazer A1 deve se verificar que $u + v \in C$, isso significa que $u + v$ deve ter quatro componentes e deve satisfazer que sua primeira componente menos a segunda componente dá 2.

Vejam: $u + v = (x_u, y_u, z_u, w_u) + (x_v, y_v, z_v, w_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v, w_u + w_v)$ tem quatro componentes.

Agora falta verificar que sua primeira componente $(x_u + x_v)$ menos a segunda componente $(y_u + y_v)$ dá 2.

Mas fazendo contas temos: $(x_u + x_v) - (y_u + y_v) = (x_u - y_u) + (x_v - y_v) = 2 + 2 = 4 \neq 2$.

Isto significa que falha A1, não precisamos verificar M1, concluímos que

C não é sub-espaço vetorial.

(b) (x, y, z, w) tais que $z = x = 2y$ e $w = x - 3y$.

Resolução:

Sabemos que $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) / x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial.

A pergunta é sobre o conjunto $C = \{(x, y, z, w) / x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ e } z = x = 2y \text{ e } w = x - 3y\} \subset \mathbb{R}^4$.

Observar:

Os elementos de C tem quatro componentes e além disso a primeira e terceira componentes devem ser iguais e iguais ao dobro da segunda componente, também a quarta componente deve ser o valor da primeira menos o triplo da segunda componente.

Precisamos validar as propriedades A1 e M1.

Verificando A1: Sejam $u, v \in C$ então $u + v \in C$.

Por serem elementos de C eles possuem quatro componentes e devem satisfazer a condição dada.

Então $u = (x_u, y_u, z_u, w_u)$ com $z_u = x_u = 2y_u$ e $w_u = x_u - 3y_u$,

e $v = (x_v, y_v, z_v, w_v)$ com $z_v = x_v = 2y_v$ e $w_v = x_v - 3y_v$.

Vejam: $u + v = (x_u, y_u, z_u, w_u) + (x_v, y_v, z_v, w_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v, w_u + w_v)$ tem quatro componentes.

Verificando as condições temos:

$z_u + z_v = x_u + x_v = 2y_u + 2y_v = 2(y_u + y_v)$, pelas propriedades de u e v .

Assim a terceira e primeira componentes são iguais e elas são iguais ao dobro da segunda componente.

Também: $w_u + w_v = (x_u - 3y_u) + (x_v - 3y_v) = (x_u + x_v) - 3(y_u + y_v)$.

Assim a quarta componente é igual a primeira componente menos o triplo da segunda componente.

Verificando M1: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e dado $u \in C$ então $\alpha u \in C$.

$\alpha u = \alpha(x_u, y_u, z_u, w_u) = (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u, \alpha w_u)$ onde $\alpha z_u = \alpha x_u = \alpha(2y_u) = 2(\alpha y_u)$ satisfazendo a primeira propriedade.

Agora partindo da quarta componente:

$\alpha w_u = \alpha(x_u - 3y_u) = \alpha x_u - \alpha(3y_u) = (\alpha x_u) - 3(\alpha y_u)$

obtemos que é igual a primeira componente menos o triplo da sua segunda componente. Portanto $\alpha u \in C$.

C é sub-espço vetorial.

- (c) (x, y, z, w) tais que $x = y = 0$.

Resposta: É sub-espço vetorial.

- (d) (x, y, z, w) tais que $x = 0$ e $y = -w$.

Resposta: É sub-espço vetorial.

2. Considere uma matriz fixa $A_{n \times n}$. Determine se os conjunto dados são ou não espaços vetoriais.

- (a) $G = \{B \in M_{n \times n} / AB = BA\}$.

Resolução

O conjunto G será espaço vetorial se satisfaz os axiomas A1 até A5 e M1 até M5.

Mas, sabemos que $M_{n \times n}$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

Assim, como G é subconjunto de $M_{n \times n}$, bastará mostrar que G é sub-espço vetorial, isto é, basta verificar A1 e M1.

Verificando A1: (Dados $U, V \in G$ então $(U + V) \in G$)

Sejam $U, V \in G$: como $U \in G$ então $U \in M_{n \times n}$ satisfazendo $AU = UA$

e como $V \in G$ então $v \in M_{n \times n}$ satisfazendo $AV = VA$.

Observar que $(U + V) \in M_{n \times n}$ e

$A(U + V) = AU + AV$ pela distributividade da multiplicação de matrizes (pela esquerda),

$AU + AV = UA + VA$ por serem elementos de G ,

$UA + VA = (U + V)A$ pela distributividade da multiplicação de matrizes (pela direita),

portanto: $A(U + V) = (U + V)A$, logo $(U + V) \in G$.

A1 é válido.

Verificando M1: (Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $U \in G$, então $\alpha U \in G$)

Como $U \in G$ temos que $AU = UA$. Também $U \in M_{n \times n}$ e como α é um escalar então $\alpha u \in M_{n \times n}$ por ser produto de matriz vezes um escalar.

Agora $A(\alpha U) = \alpha(AU)$ (propriedades de associação do produto de matrizes vezes escalar),
 $\alpha(AU) = \alpha(UA)$ por ser U elemento de G ,
 $\alpha(UA) = (\alpha U)A$ pela associatividade da multiplicação de matrizes vezes escalar.
 Assim $A(\alpha U) = (\alpha U)A$ então $(\alpha U) \in G$.

M1 é válido.

Logo, G é sub-espaço vetorial de $M_{n \times n}$ com as operações usuais, portanto G é espaço vetorial com as operações usuais.

- (b) $G = \{B \in M_{n \times n} / AB \text{ e } BA \text{ são diferentes}\}$

Resolução

Lembrar que todo espaço vetorial deve conter o elemento Zero.

No caso a matriz nula $0_{n \times n}$ não pertence ao conjunto G .

Isto porque, qualquer que seja a matriz A temos que $A0 = 0 = 0A$ e para que 0 pertença ao conjunto G deve ser satisfeito que $A0$ seja diferente de $0A$ (falso).

Falhando uma propriedade nem precisa verificar as demais, o conjunto não é espaço vetorial.

G não é espaço vetorial

- (c) $G = \{B \in M_{n \times n} / BA = 0\}$

Observar que os elementos de G são matrizes que anulam a matriz A , então a matriz zero ($B = 0$) é um elemento de G , mas não necessariamente o único.

Resposta: É espaço vetorial.

3. Encontre um conjunto de vetores que gera o espaço solução do sistema homogêneo $AX = 0$, sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Por ser um sistema com três equações e quatro incógnitas, é provável que existam graus de liberdade.

Devemos então, primeiro resolver o sistema homogêneo $AX = 0$.

Obtemos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Observar que o conjunto solução S (também é um espaço vetorial) é o conjunto com todas as soluções, assim podemos escrever

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ou melhor

$$S = \left\{ X = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim, toda solução (elemento do conjunto S) é um múltiplo do vetor $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo podemos

formar o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ formado por esse vetor fixo.

G é um gerador de S .

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Por ser um sistema com três equações e quatro incógnitas, é provável que existam graus de liberdade.

Devemos então, primeiro resolver o sistema homogêneo $AX = 0$.

Obtemos a solução $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

Observar que o espaço solução S pode ser representado por

$$S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim, toda solução é uma combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Formando o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ decimos que G é um gerador de S .

Um conjunto gerador é $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Encontre conjuntos geradores para os seguintes subespaços:

(a) $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / 3a - 5b + 2c = 0\}$.

Resolução

Observar que um elemento arbitrário de E deve satisfazer $3a - 5b + 2c = 0$, ou $a = \frac{5}{3}b - \frac{2}{3}c$.

Então, se $(a, b, c) \in E$ temos

$$(a, b, c) = \left(\frac{5}{3}b - \frac{2}{3}c, b, c\right) = \left(\frac{5}{3}b, b, 0\right) + \left(-\frac{2}{3}c, 0, c\right)$$

$$(a, b, c) = b\left(\frac{5}{3}, 1, 0\right) + c\left(-\frac{2}{3}, 0, 1\right) = \frac{b}{3}(5, 3, 0) + \frac{c}{3}(-2, 0, 3).$$

Um conjunto gerador é $G = \{(5, 3, 0), (-2, 0, 3)\}$.

- (b) $E = \{A \in M_{2 \times 2} / 3a_{11} = 2a_{12}\}$.

Resolução

Como $A \in M_{2 \times 2}$ representamos por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Por ser elemento de E , deve satisfazer a condição dada $3a_{11} = 2a_{12}$, ou $a_{11} = \frac{2}{3}a_{12}$, então escrevemos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}a_{12} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = a_{12} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um gerador será $G = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Outro pode ser o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

- (c) $E = \{p \in P_3 / p(2) = 0\}$.

Resolução

Seja $p \in P_3$, então ele pode ser representado por $p = p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $p \in E$, então $p(2) = 0$. Substituindo na sua representação temos:

$p(2) = 0 = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d$, isto é $8a + 4b + 2c + d = 0$. Daqui podemos expressar por $d = -8a - 4b - 2c$.

Substituindo na representação do polinômio temos

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = at^3 + bt^2 + ct - 8a - 4b - 2c$$

$p(t) = a(t^3 - 8) + b(t^2 - 4) + c(t - 2)$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Assim encontramos uma representação de qualquer polinômio $p \in E$ utilizando os polinômios fixos $t^3 - 8$, $t^2 - 4$ e $t - 2$.

Um gerador será $S = \{t - 2; t^2 - 4; t^3 - 8\}$

- (d) $E = \{p \in P_3 / p(2) = p(-1)\}$.

Resolução

Seja $p \in P_3$, então ele pode ser representado por $p = p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Se $p \in E$, então $p(2) = p(-1)$. Substituindo na sua representação temos:

$$p(2) = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = p(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d,$$

isto é $8a + 4b + 2c + d = -a + b - c + d$.

Daqui podemos expressar por $9a + 3b + 3c = 0$ ou $3a + b + c = 0$ ou $c = -3a - b$.

Substituindo na representação do polinômio temos

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = at^3 + bt^2 + (-3a - b)t + d$$

$p(t) = a(t^3 - 3t) + b(t^2 - t) + d$ para quaisquer $a, b, d \in \mathbb{R}$.

Um gerador será $S = \{1; t^2 - t; t^3 - 3t\}$

5. Encontre uma base para os seguintes espaço de \mathbb{R}^3 ,

(a) Todos os vetores da forma (a, b, c) , onde $b = a$.

Resolução

O espaço dado é o conjunto $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / b = a\}$.

Procuramos um gerador de C , para isto temos que

$(a, b, c) = (b, b, c) = (b, b, 0) + (0, 0, c) = b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ para quaisquer $b, c \in \mathbb{R}$.

Assim, um gerador é o conjunto $G = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Para ser base o conjunto deve ser linearmente independente (L.I.).

Para verificar que é linearmente independente devemos combinar linearmente o zero e os coeficientes dessa combinação devem ser apenas zeros.

Se $r(1, 1, 0) + s(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ então $(r, r, s) = (0, 0, 0)$, daqui a única solução $r = 0$ e $s = 0$.

Logo é um conjunto L.I.

Portanto por ser gerador e L.I. o conjunto $G = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base.

(b) Todos os vetores da forma (a, b, c) , onde $a = 0$.

Resolução

No presente conjunto temos que a não é arbitrário, a é o zero, enquanto que b e c são números reais quaisquer. Assim, vamos representar como

$(a, b, c) = (0, b, c) = (0, b, 0) + (0, 0, c) = b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$.

Verificar que são L.I. é simples, então uma base é o conjunto $\beta = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(c) Todos os vetores da forma $(a - b, b + c, 2a - b + c)$. **Esse aqui é um problema importante.**

Resolução

O espaço dado é o conjunto $C = \{(a - b, b + c, 2a - b + c) \in \mathbb{R}^3 / a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Procuramos um gerador de C , para isto temos que

$(a - b, b + c, 2a - b + c) = (a, 0, 2a) + (-b, b, -b) + (0, c, c) = a(1, 0, 2) + b(-1, 1, -1) + c(0, 1, 1)$ para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Um gerador é $\delta = \{(1, 0, 2), (-1, 1, -1), (0, 1, 1)\}$.

Agora verificamos se o conjunto é linearmente independente.

Se $r(1, 0, 2) + s(-1, 1, -1) + t(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$, daqui $(r - s, s + t, 2r - s + t) = (0, 0, 0)$.

Isto é um sistema de equações

$$\begin{cases} r - s & = 0 \\ s + t & = 0 \\ 2r - s + t & = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $X = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Isto significa que $r = s = t = 0$ não é a única solução. Existem muitas, por exemplo $r = 1, s = 1$ e $t = -1$.

Portanto, o conjunto δ não é L.I., logo não é base.

Observando detenidamente vemos que o terceiro vetor é a soma dos dois primeiros, então descar-

tando o terceiro, podemos verificar que o conjunto dos dois primeiros vetores é L.I.
Uma base será $\beta = \{(1, 0, 2), (-1, 1, -1)\}$.

6. Encontre a dimensão dos seguintes sub-espços:

(a) Todos os vetores da forma (a, b, c, d) , onde $d = a + b$.

Resolução

Para determinar a dimensão devemos encontrar uma base e contar o número de elementos que contenha.

Para determinar a base:

$$(a, b, c, d) = (a, b, c, a+b) = (a, 0, 0, a) + (0, b, 0, b) + (0, 0, c, 0) = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, 1) + c(0, 0, 1, 0)$$

O conjunto $\beta = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ é um gerador e o aluno pode verificar facilmente que é L.I., assim é uma base.

Como β possui três elementos, a dimensão do sub-espço é 3.

(b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d) , onde $c = a - b$ e $d = a + b$.

Resolução

$$(a, b, c, d) = (a, b, a - b, a + b) = (a, 0, a, a) + (0, b, -b, b) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1).$$

Um gerador é $\beta = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}$ e além disso é um conjunto L.I.

(NOTA: É fácil ver que é L.I., pois, são elementos não nulos, e a primeira componente do primeiro vetor não poderá ser combinação do segundo dado é uma componente nula. O aluno deverá verificar que é L.I. caso a pergunta seja considerada na prova.)

Como β é uma base e tem dois elementos o espço tem dimensão 2.

(c) Todos os vetores da forma $(a + c, a - b, b + c, -a + b)$.

Resolução

$$(a + c, a - b, b + c, -a + b) = a(1, 1, 0, -1) + b(0, -1, 1, 1) + c(1, 0, 1, 0).$$

Um gerador é $\delta = \{(1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ mas não é base pois o terceiro vetor é a soma dos dois primeiros, é um conjunto L.D. (linearmente dependente).

Retirando o vetor dependente temos uma base com dois elementos $\beta = \{(1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 1)\}$

Dimensão 2.

7. Seja W o subespço de \mathbb{R}^3 formado pelos vetores $V = (x, y, z)$ tais que $x + 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{V_1, V_2, V_3\}$ de \mathbb{R}^3 tal que V_1 e V_2 pertençam a W .

Observar que W é um plano, então basta obter dois vetores direção do plano W e depois podemos obter o produto vetorial desses dois que não estará em W pois é ortogonal aos dois vetores obtidos.

Resolução

Primeiro vamos conhecer o conjunto W e seus elementos.

$W = \{(x, y, z) / x + 2y + 4z = 0\}$. Assim, um elemento de W pode ser representado por:

$$(x, y, z) = (-2y - 4z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-4, 0, 1).$$

Logo uma base de W é o conjunto $\beta = \{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$ (gera W e são L.I. - verificar!).

Por ser base $\beta \subset W$. Assim, podemos tomar $V_1 = (-2, 1, 0)$ e $V_2 = (-4, 0, 1)$.

Lembrar que \mathbb{R}^3 tem dimensão 3, logo qualquer base estará formada por 3 vetores linearmente independentes. Como W é sub-espço vetorial, já temos dois vetores LI que também pertencem a \mathbb{R}^3 .

Para obter um terceiro vetor que seja linearmente independente de V_1 e V_2 , recorreremos a definição da operação produto vetorial. Lembrar o produto vetorial é uma operação definida apenas para vetores em

\mathbb{R}^3 . Mais ainda, o produto vetorial resultante é um vetor ortogonal simultaneamente aos dois vetores utilizados na operação.

Vamos escolher então $V_3 = V_1 \times V_2$.

$$V_3 = (-2, 1, 0) \times (-4, 0, 1) = (1, 2, 4).$$

Assim, podemos formar o conjunto $\gamma = \{(-2, 1, 0), (-4, 0, 1), (1, 2, 4)\}$. Basta, verificar que é um conjunto L.I. (Verificar!).

8. a. Mostre que os polinômios: $1, t - 1, t^2 - 3t + 1$ formam uma base de P_2 . Verificará que esse conjunto é L.I. e que gera qualquer polinômio quadrático.

Resolução

Primeiro mostraremos que gera P_2 . Dado um polinômio qualquer de P_2 ele deve ser combinação linear dos elementos do conjunto. Seja

$$p(t) = at^2 + bt + c = m(1) + n(t - 1) + r(t^2 - 3t + 1)$$

devemos determinar m, n e r em função dos coeficientes do polinômio que satisfaçam a igualdade:

$$at^2 + bt + c = m + nt - n + rt^2 - 3rt + r = rt^2 + (n - 3r)t + (m - n + r)$$

cujas soluções são $r = a, n = b + 3a$ e $m = c + b + 2a$.

Para mostrar que são L.I. fazemos: $m(1) + n(t - 1) + r(t^2 - 3t + 1) = 0$ e devemos encontrar uma única solução de valores todos nulos.

(Nota: O zero (0) é o polinômio zero, isto é $0 = 0t^2 + 0t + 0$).

Então

$$m(1) + n(t - 1) + r(t^2 - 3t + 1) = rt^2 + (n - 3r)t + (m - n + r) = 0 = 0t^2 + 0t + 0$$

logo $r = 0, n = 0$ e $m = 0$.

É um conjunto L.I. portanto o conjunto $\{1, t - 1, t^2 - 3t + 1\}$ é uma base de P_2 .

- b. Expresse o polinômio $2t^2 - 5t + 6$ como combinação linear dos elementos da base.

Resolução

Expressar como combinação linear dos elementos da base significa expressar como soma de múltiplos dos elementos $1, t - 1, t^2 - 3t + 1$, isto é,

$$2t^2 - 5t + 6 = m(1) + n(t - 1) + r(t^2 - 3t + 1)$$

$$2t^2 - 5t + 6 = m - n + r + nt - 3rt + rt^2$$

Igualando os coeficientes dos polinômios e resolvendo temos: $r = a = 2, n = b + 3a = 1$ e $m = 5$.

Assim conhecemos os coeficientes da combinação linear.

Portanto, expressamos por $2t^2 - 5t + 6 = 5(1) + 1(t - 1) + 2(t^2 - 3t + 1)$.

9. Encontre os valores λ , tais que o sistema homogêneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ tenha solução não nula (não trivial). E para estes valores de λ encontre uma base para o conjunto solução, para as seguintes matrizes A :

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Primeiro o sistema $(A - \lambda I_3)X = 0$ deve ter solução não nula.

Pelas propriedades do determinante isso acontece se o determinante da matriz de coeficientes do

sistema é nulo. Isto é, se

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Resolvendo o determinante temos $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ ou $(1 - \lambda)^3 = 0$.

Assim, achamos o valor $\lambda = 1$, tal que o sistema $(A - \lambda I_3)X = 0$ tem solução não nula.

A segunda parte pede encontrar a solução do sistema para $\lambda = 1$, isto é, resolver

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos a solução $X = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Assim o conjunto solução é $S = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Concluindo, para $\lambda = 1$ o sistema $(A - \lambda I_3)X = 0$ possui solução não trivial (infinitas soluções) e

para o conjunto solução uma base é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Agora o sistema é $(A - \lambda I_4)X = 0$.

Novamente calculamos o determinante da matriz desse sistema e igualamos a zero para determinar os λ para os quais existe solução não nula.

$$\det(A - \lambda I_4) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Temos então dois valores $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$.

Resolvemos primeiro para $\lambda = 1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolvendo o sistema o conjunto solução é } S = \left\{ \begin{bmatrix} 3x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{Logo, para } \lambda = 1 \text{ uma base do conjunto solução é } \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Agora para $\lambda = 2$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Resolvendo o sistema o conjunto solução é } S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{Logo, para } \lambda = 2 \text{ uma base é } \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução

Calculamos o determinante da matriz desse sistema e igualamos a zero para determinar os λ para os quais existe solução não nula.

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Resolvendo o determinante temos $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ou $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$.

Temos então três valores $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Agora para $\lambda = 2$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 2$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = -1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = -1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução

O sistema é $(A - \lambda I_4)X = 0$.

Calculamos o determinante da matriz desse sistema e igualamos a zero.

$$\det(A - \lambda I_4) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Facilmente obtemos $(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$.

Temos então quatro valores $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = 2$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{29}{3}x_4 \\ -\frac{7}{3}x_4 \\ -3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} / x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 2$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 29 \\ 7 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = 3$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{9}{4}x_3 \\ \frac{3}{4}x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = 3$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = -1$, o sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução $S = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.

Logo, para $\lambda = -1$ uma base do conjunto solução é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

10. Seja P_3 o espaço vetorial de todos os polinômios de ordem 3 (com as somas e multiplicação por escalar usuais). Seja W_1 o subespaço de P_3 , que consiste de todos os polinômios $p(t)$ tais que $p(0) = 0$. E seja W_2 o subespaço de P_3 , que consiste de todos os polinômios $q(t)$ tais que $q(1) = 0$. Encontrar uma base para os espaços:

(a) W_1 .

Resolução

Representamos por $W_1 = \{p(t) \in P_3 / p(0) = 0\}$.

Se $p(t) \in W_1$, então $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ e $p(0) = 0 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d$.

Dessa última igualdade $d = 0$, então $p(t) = at^3 + bt^2 + ct$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Assim todo elemento de W_1 é combinação linear dos elementos do conjunto $\beta = \{t, t^2, t^3\}$.

Além disso, β é L.I. Portanto β é uma base de W_1 .

(b) W_2 .

Resolução

Representamos por $W_2 = \{q(t) \in P_3 / q(1) = 0\}$.

Se $q(t) \in W_2$, então $q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ e $q(1) = 0 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d$.

Isto é $a + b + c + d = 0$ ou $d = -a - b - c$. Então

$q(t) = at^3 + bt^2 + ct - a - b - c = a(t^3 - 1) + b(t^2 - 1) + c(t - 1)$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Uma base é $\beta = \{t - 1, t^2 - 1, t^3 - 1\}$

(c) $W_1 \cap W_2$, (satisfazem as duas condições).

Resolução

$W_1 \cap W_2 = \{r(t) \in P_3 / r(0) = 0 \text{ e } r(1) = 0\}$.

Se $r(t) \in W_1 \cap W_2$ então $r(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ e $r(0) = d = 0$ e $r(1) = a + b + c + 0 = 0$.

Daqui $d = 0$ e $c = -a - b$. Logo, os elementos do conjunto $W_1 \cap W_2$ podem ser expressados por

$q(t) = at^3 + bt^2 + ct = at^3 + bt^2 + (-a - b)t = a(t^3 - t) + b(t^2 - t)$.

É fácil verificar que uma base é $\beta = \{t^2 - t, t^3 - t\}$.