ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 3 - Gabarito

Todo sistema de equações lineares deve ser resolvido utilizando o método de eliminação Gauss ou Gauss-Jordan.

1. Um editor publica um possível sucesso em três apresentações diferentes: livro de bolso, edição para clube de leitores e edição de luxo. Cada livro de bolso precisa de um minuto de costura e 2 para colar. Cada livro da edição para clube de leitores precisa 2 minutos para costura e 4 para colar. Cada livro da edição de luxo precisa 3 minutos de costura e 5 de cola. Se o talher de costura está disponível 6 horas diárias e a de cola 11 horas, quantos livros de cada apresentação podem ser elaborados por dia, de maneira a aproveitar os talheres em toda sua capacidade?
   Resolução: A matriz de incôgnitas é
   $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{número de livros de bolso por dia} \\ \text{número de livros para clube de leitores por dia} \\ \text{número de livros de edição de luxo por dia} \end{bmatrix}.$$
   Então o sistema de equações é $\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 360 \\ 2x + 4y + 5z = 660 \end{cases}$. Montando a matriz estendida e resolvendo temos
   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 360 \\ 2 & 4 & 5 & 660 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$
   Logo, o número de livros de edição de luxo deve ser $z = 60$, e para os outros temos a relação $x + 2y = 180$. Fazendo y qualquer número inteiro positivo $y = n$, dá $x = 180 - 2n$. Assim
   $$X = \begin{bmatrix} 180 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   Portanto, escolhendo elaborar n livros para clube de leitores em um dia, o número de livros de bolso será $180 - 2n$.
   Por outro lado, na prática os valores x e y não podem ser negativos, assim o menor valor para x é zero, que seria para $y = 90$. E o maior valor para x seria para $y = 0$. Então: $0 \leq y \leq 90$ e $0 \leq x \leq 180$.

2. Considere uma sociedade simples, formada por um agricultor, um carpinteiro e um alfajate. Cada um produz um bem: o agricultor produz alimentos, o carpinteiro construe casas e o alfajate fabrica roupa. Para simplicidade, assuma que cada individuo produz uma unidade de cada bem em três meses.

Suponha que o agricultor consome $\frac{2}{5}$ do alimento, $\frac{1}{3}$ da habitação e $\frac{1}{2}$ da roupa. Que o carpinteiro consome $\frac{2}{5}$ do alimento, $\frac{1}{3}$ da habitação e $\frac{1}{2}$ da roupa. Que o alfajate consome $\frac{1}{5}$ do alimento, $\frac{1}{3}$ da habitação e nada de roupa. Determine a matriz de transição do problema e um vetor estacionário.
Resolução: A matriz de transição será

$$T = \begin{array}{c} \\ \text{Agricultor} \\ \text{Alfajate} \\ \text{Carpinteiro} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Agricultor} & \text{Alfajate} & \text{Carpinteiro} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \end{array}$$

Para determinar o estado estacionário resolvemos o sistema matricial $TX = X$ e a equação $x + y + z = 1$, o que leva a matriz estendida

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

sendo o estado estacionário $X = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$.

3. Em uma cidade do interior existem três indústrias primárias. Uma mina de cobre que para produzir R$ 1.00 de cobre consome R$ 0.20 de cobre, R$ 0.10 de transporte e R$ 0.20 de energia elétrica. Uma estrada de ferro que para produzir R$ 1.00 de transporte, requer R$ 0.10 de cobre, R$ 0.10 de transporte e R$ 0.40 de energia elétrica. Uma planta geradora de energia elétrica que para produzir R$ 1.00 de energia elétrica consome R$ 0.20 de cobre, R$ 0.30 de energia elétrica e R$ 0.20 de transporte. Para o presente ano, as indústrias têm uma demanda externa de R$ 1.2 milhões de cobre, R$ 0.80 milhões de transporte e R$ 1.5 milhões de energia elétrica.

   (a) Monte um sistema de equações que possibilite resolver quanto cada indústria deve produzir para atender as demandas.
   Resolução: Para determinar as incógnitas do problema, sabemos que é conhecida a produção de cada indústria em valor de 1.00 real de cada produto. Então, denotamos por x a quantidade de frações de cobre em valor de R$ 1.00, y a quantidade de frações de transporte em valor de R$ 1.00 e z a quantidade de frações de energia elétrica em valor de R$ 1.00 .
   Agora, para atender a demanda externa das três indústrias, elas precisam atender a demanda (interna) entre elas. Caso contrário por exemplo, se a mina de cobre não abastece a estrada de ferro de cobre, ela não poderá produzir o transporte solicitado, e a própria mina precisa de cobre para produzir mais cobre. Logo,

$$\begin{cases} x = 1200000 + 0.2x + 0.10y + 0.20z \\ y = 800000 + 0.10x + 0.10y + 0.20z \\ z = 1500000 + 0.20x + 0.40y + 0.30z \end{cases}$$

   O sistema a ser resolvido é

$$\begin{cases} 0.8x - 0.10y - 0.20z = 1200000 \\ 0.90y - 0.10x - 0.20z = 800000 \\ 0.70z - 0.20x - 0.40y = 1500000 \end{cases}$$

(b) Represente o sistema como um sistema matricial, $AX = B$, (B é uma matriz coluna) e resolva o sistema encontrando a inversa da matriz A.

Resolução: A equação matricial tem a forma,

$$\begin{bmatrix} 0.80 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.90 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200000 \\ 800000 \\ 1500000 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Para resolver achamos a inversa de A, A^{-1}, então

$$X = A^{-1}B.$$

A inversa de A deve ser realizada utilizando o método de Gauss Jordan, assim monta-se a matriz A extendida com a matriz identidade,

$$\begin{bmatrix} 0.80 & -0.1 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.90 & -0.2 & 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & -0.4 & 0.70 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} +8 & -1 & -2 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & +9 & -2 & 0 & 10 & 0 \\ -2 & -4 & +7 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

A segunda forma foi obtida multiplicando cada linha veces 10, para não utilizar decimais. Realizando as operações elementares necessárias obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{30}{77} & \frac{40}{77} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{104}{77} & \frac{36}{77} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{68}{77} & \frac{142}{77} \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz inversa é

$$A^{-1} = \frac{2}{77} \begin{bmatrix} 55 & 15 & 20 \\ 11 & 52 & 18 \\ 22 & 34 & 71 \end{bmatrix}$$

e o vetor solução é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{77} \begin{bmatrix} 216.000.000 \\ 163.600.000 \\ 320.200.000 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.805.194,81 \\ 2.124.675,32 \\ 4.158.441,56 \end{bmatrix}$$

4. Considere a matriz de transição

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 1 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

(a) Se $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ utilizando até três casas decimais.

Resolução:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.14 \\ 0.80 \end{bmatrix} \text{ e } x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.042 \\ 0.188 \\ 0.770 \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que T é regular e encontre o seu estado estacionário.

Definição: Uma matriz de transição T, é regular se todas as entradas de alguma potência de T são positivas.

Definição: Um vetor de probabilidades, estado x, é o estado estacionário para uma matriz de transição T, se satisfaz $Tx = x$.

Resolução: Observarmos que

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.06 & 0.06 \\ 0.2 & 0.14 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.74 \end{bmatrix} \text{ e } T^3 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.042 & 0.06 \\ 0.2 & 0.188 & 0.188 \\ 0.74 & 0.77 & 0.752 \end{bmatrix},$$

isto é, a potência cubo tem todas as entradas positivas, logo é uma matriz regular.

Para encontrar o estado estacionário, resolvemos o sistema $TX = X$, ou equivalentemente $(T - I)X = 0$, lembramos que cada estado é uma matriz probabilística, assim a soma das entradas deve ser 1, incrementando a equação $x + y + z = 1$, resolvemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0.3 & 0.0 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 0.5 & -0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando Gauss-Jordan obtemos

$$X = \begin{bmatrix} 0.056604 \\ 0.188679 \\ 0.754717 \end{bmatrix}.$$

5. Mostre que cada uma das seguintes matrizes de transição atingem o seu estado de equilibrio

(a) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$.

Resolução: Atingir o estado de equilibrio é possuir um estado estacinário, assim resolvemos

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix} X = X \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.7 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & -0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.4 \end{bmatrix} X = 0$$

Lembrar que o estado estacionário possue a propriedade que a soma de suas entradas é 1. Então temos o sistema anterior incrementado com a equação $x+y+z = 1$. A matriz estendida

$$\begin{bmatrix} -0.7 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & -0.6 & 0.0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução é o estado estacionário $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Resolução: Para o caso, a matriz estendida será

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O estado estacionário é $X = \begin{bmatrix} \frac{9}{17} \\ \frac{4}{17} \\ \frac{4}{17} \end{bmatrix}$.

6. Um estudo determina que a ocupação de uma criança, quando vira adulto, depende da ocupação do pai e é dada pela seguinte matriz de transição (P é profissional, A é agricultor, O é operário)

$$\text{Ocupação do filho} \quad \begin{array}{c c} & \text{Ocupação do pai} \\ & \begin{array}{ccc} P & A & O \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ A \\ O \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Assim, a probabilidade de ser profissional o filho de um profissional é de 0.8.

(a) Qual a probabilidade de que o neto de um profissional seja profissional?
Resolução: Para responder precisamos relacionar um neto com o pai, assim

$$\text{Ocupação do neto} \quad \begin{array}{c c} & \text{Ocupação do filho} \\ & \begin{array}{ccc} P & A & O \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ A \\ O \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c c} & \text{Ocupação do pai} \\ & \begin{array}{ccc} P & A & O \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ A \\ O \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \quad \text{Ocupação do neto} \quad \begin{array}{c c} & \text{Ocupação do pai} \\ & \begin{array}{ccc} P & A & O \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ A \\ O \end{array} & \begin{bmatrix} 0.69 & 0.43 & 0.34 \\ 0.15 & 0.32 & 0.24 \\ 0.16 & 0.25 & 0.42 \end{bmatrix} \end{array}$$

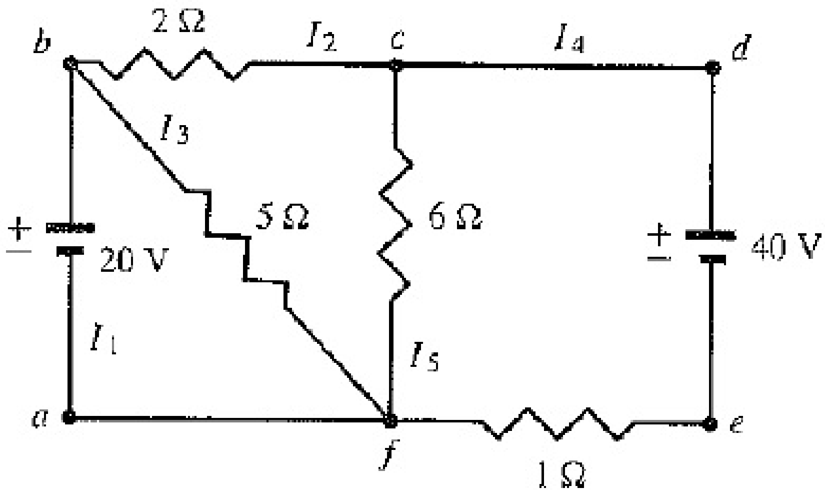
Portanto, a probabilidade pedida é de 69%.

(b) Ao longo prazo, qual a proporção da população que estará dedicada a agricultura?
Resolução: Podemos encontrar o estado estacionário, se existir teremos a informação a longo prazo. A matriz estendida do sistema é

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & -0.4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema é $X = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, o que significa que $\frac{6}{29}$ da população estará dedicada a agricultura.

7. Determine as intensidades de corrente no circuito:



Resolução: Orientando I_1 do nó a ao nó b,I_2 do nó b ao nó c,I_3 do nó b ao nó f,I_4 do nó d ao nó c e I_5 do nó c ao nó f.
Agora definimos o ciclo 1, sendo aquele que vá pelos nós a, f, b e a; o ciclo 2, pelos nós f, c, b e f, e o ciclo 3, pelos nós f, e, d, c e f.
Considerando a conservação de energia dos três ciclos e duas equações de conservação de carga, temos o sistema:

$$\begin{cases} 5I_3 - 20 = 0 \\ 6I_5 + 2I_2 - 5I_3 = 0 \\ -I_4 + 40 - 6I_5 = 0 \\ I_1 = I_3 + I_2 \\ I_3 + I_5 = I_1 + I_4 \end{cases}$$

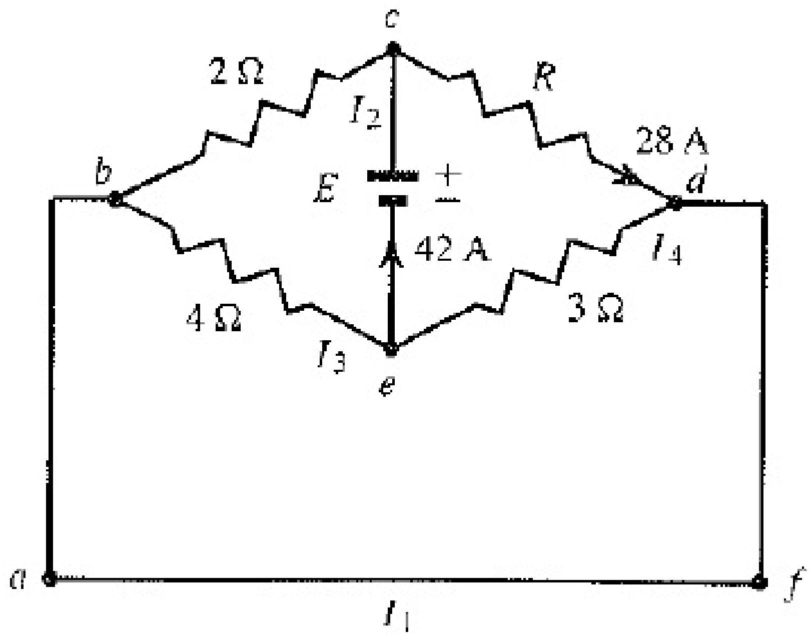
A matriz estendida para $X = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & | & 20 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 & | & -40 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$.

Resolvendo por Gauss-Jordan dá:

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

O que significa que I_1 e I_2 foram orientados ao contrário, re-orientando I_1 do nó b ao nó a, e I_2 do nó c ao nó b, temos que $I_1 = 1A$, $I_2 = 5A$, $I_3 = 4A$, $I_4 = 10A$ e $I_5 = 5A$. (A é ampere).

8. Determine todos os valores envolvidos nos circuitos seguintes:



Resolução:
Consideramos a corrente de I_1 no sentido f a a, a corrente de I_2 de b a c, a corrente de I_3 de b a e, e a corrente de I_4 de e a d.
Considerando o ciclo f, d, e, b e a, temos a equação (conservação de energia) $3I_4 + 4I_3 = 0$.
No ciclo e, c e b temos $E + 2I_2 - 4I_3 = 0$, e no ciclo e, d e c temos $-3I_4 + 28R - E = 0$.
Sendo 6 as incógnitas, então precisamos de mais três equações sobre os nós.
Para o nó b, temos $I_1 = I_2 + I_3$; para o nó e, temos $I_3 = I_4 + 42$; e por último para o nó d, temos $I_4 + 28 = I_1$.
O sistema de equações é

$$\begin{cases} 3I_4 + 4I_3 = 0 \\ E + 2I_2 - 4I_3 = 0 \\ -3I_4 + 28R - E = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 = 42 \\ -I_1 + I_4 = -28 \end{cases}$$

Montando a matriz estendida e resolvendo temos $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -14 \\ 18 \\ -24 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Logo temos que trocar a orientação da corrente de I_2 e I_4.
Os valores envolvidos são $I_1 = 4A$, $I_2 = 14A$, $I_3 = 18A$, $I_4 = 24A$, $E = 100V$ e $R = 1\Omega$.

9. Encontre todos os valores de λ para os quais a matriz $A - \lambda I_n$ tem inversa, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Construindo

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix},$$

e calculando o seu determinante temos $det(A - \lambda I_n) = -\lambda(2-\lambda)^2(1-\lambda)$.
Sabemos que se o determinante é zero a matriz não terá inversa, logo a matriz tem inversa se $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq 1$.

10. Determine todos os valores de λ para os quais $det(A - \lambda I) = 0$, em que

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

O determinante será

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Igualando o determinante a zero temos as soluções: $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Resolução: Identicamente a parte a) calculamos o determinante

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

O polinômio é

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) - 2 - 4(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Aplicando Ruffini (procura como raízes os fatores do -8, como $+1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8$) temos:

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & +5 & -2 & -8 & \\ & +1 & -6 & +8 & -1 \\ \hline -1 & +6 & -8 & +0 & \end{array}$$

Assim: $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 6\lambda - 8) = -(\lambda + 1)(\lambda - 4)(\lambda - 2)$.Igualando o determinante a zero temos os valores de $\lambda = 4$, $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$.