Lista 4 - Ajuste de curvas

March 19, 2020

1. O distribuidor de um produto A tabelou os dados abaixo. Utilizando o método de ajuste de curvas estudado, deduza o polinômio de grau 2(quadrático) que melhor ajusta esses dados. (Mínimos quadrados).

Número de semanas de venda	1	2	3	4	5	6	7
Receita bruta (milhares de reais)	0.8	0.5	3.2	4.3	4.8	4.1	3.0

Solução:
Utilizando o método dos mínimos quadrados, temos:
Para encontrar a função de ajuste $g(t) = at^2 + bt + c$, com a, b e c números reais, para os valores fornecidos, monta-se as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \\ 1 & t_6 & t_6^2 \\ 1 & t_7 & t_7^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 \\ .5 \\ 3.2 \\ 4.3 \\ 4.8 \\ 4.1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Daqui os coeficientes da função quadrática de ajuste, é:

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = (M^tM)^{-1}M^tY = \left(\begin{bmatrix} 7 & 28 & 140 \\ 28 & 140 & 784 \\ 140 & 784 & 4676 \end{bmatrix} \right)^{-1} M^tY$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} & \frac{67}{84} & -\frac{2}{21} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{21} & \frac{1}{84} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix} Y$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{4} & \frac{8}{21} & \frac{9}{28} & \frac{1}{14} & -\frac{31}{84} \\ \frac{5}{84} & 0 & -\frac{1}{28} & -\frac{1}{21} & -\frac{1}{28} & 0 & \frac{5}{84} \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} -2.41 \\ 2.66 \\ -0.26 \end{bmatrix}$$

Que identicamente ao outro método fornece a curva de ajuste: $g(t) = -2.41 + 2.66\,t - 0.26\,t^2$.

2. O dono de um negôcio em rápida expansão descobre que nos cinco primeiros meses do ano as vendas (em milhares de reais) foram 4.0 ; 4.4 ; 5.2 ; 6.4 e 8.0 . O dono coloca estes dados num gráfico e conjetura que, pelo resto do ano, a curva de vendas pode ser aproximada por um polinômio quadrático. Encontre o polinômio quadrático de melhor ajuste de mínimos quadrados para a curva de vendas e use-o para informar a venda projetada no décimo segundo mês do ano.

Solução:
Calcula-se os somatórios a partir da tabela na qual completamos os produtos necessários.
A última coluna armazena o somatório da linha correspondente:

t_i	1	2	3	4	5	$\sum t_i = 15$
y_i	4	4.4	5.2	6.4	8	$\sum y_i = 28$
$t_i y_i$	4	8.8	15.6	25.6	40	$\sum t_i y_i = 94$
t_i^2	1	4	9	16	25	$\sum t_i^2 = 55$
$t_i^2 y_i$	4	17.6	46.8	102.4	200	$\sum t_i^2 y_i = 370.8$
t_i^3	1	8	27	64	125	$\sum t_i^3 = 225$
t_i^4	1	16	81	256	625	$\sum t_i^4 = 979$

Utilizando o método dos mínimos quadrados para um ajuste quadrático, temos:

Para encontrar a função de ajuste $g(t) = at^2 + bt + c$, com a, b e c números reais, para os valores fornecidos, monta-se as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 4.4 \\ 5.2 \\ 6.4 \\ 8.0 \end{bmatrix}.$$

Daqui os coeficientes da função quadrática de ajuste, é:

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = (M^t M)^{-1} M^t Y = \left(\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \right)^{-1} M^t Y$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{33}{10} & \frac{1}{2} \\ -\frac{33}{10} & \frac{187}{70} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix} Y$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{37}{35} & \frac{23}{70} & \frac{6}{7} & \frac{37}{70} & -\frac{23}{35} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4.0 \\ -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Que identicamente ao outro método fornece a curva de ajuste: $g(t) = 4.0 - 0.2\,t + 0.2\,t^2$.

3. Um físico realiza as seguintes medições em um laboratório, para a queda livre de um peso. As distâncias são medidas em relação a um ponto de referência previamente fixado.

Tempo de queda	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Distância percorrida	-0.18	0.31	1.03	2.48	3.73

Utilizando o método de ajuste de curvas estudado, deduza o polinômio de grau 2(quadrático) que melhor ajusta os dados acima. (Mínimos quadrados).

Solução:

Aplica-se o método dos mínimos quadrados.

Para encontrar a função de ajuste $g(t) = at^2 + bt + c$, com a, b e c números reais, para os valores fornecidos, monta-se as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 \\ 1 & 0.2 & 0.04 \\ 1 & 0.3 & 0.09 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 \\ 0.31 \\ 1.03 \\ 2.48 \\ 3.73 \end{bmatrix}$$

Daqui os coeficientes da função quadrática de ajuste, é:

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = (M^t M)^{-1} M^t Y = \left(\begin{bmatrix} 5 & 1.5 & 0.55 \\ 1.5 & 0.55 & 0.225 \\ 0.55 & 0.225 & 0.0979 \end{bmatrix} \right)^{-1} M^t Y$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 & -33 & 50 \\ -33 & 267.143 & -428.571 \\ 50 & -428.571 & 714.286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.01 & 0.04 & 0.09 & 0.16 & 0.25 \end{bmatrix} Y$$

$$\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & -0.8 & -0.6 & 0.6 \\ -10.5714 & 3.28571 & 8.57143 & 5.28571 & -6.57143 \\ 14.2857 & -7.14286 & -14.2857 & -7.14286 & 14.2857 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} -0.398 \\ 0.347143 \\ 16.0714 \end{bmatrix}$$

Que identicamente ao outro método fornece a curva de ajuste: $g(t) = -0.398 + 0.347143\, t + 16.0714\, t^2$.

4. Uma pesquisadora em química, após um processo térmico sobre um alimento, tabelou a presença de uma componente em cinco tempos diferentes. Após uma análise dos dados conjetura que uma hipérbole pode ajustar os mesmos. Utilizando o método dos mínimos quadrados, determine a hipérbole que melhor ajusta os dados da tabela a seguir:

	$tempo(hr)$	$componente(mg)$
1	0.8	2.5
2	1.0	1.0
3	1.5	0.4
4	2.0	0.25
5	5.0	1/13

Resposta:
Uma hipérbole de ajuste terá a expressão:

$$y = \frac{1}{at + b}$$

Procura-se então os valores a e b. Mas como quociente é mais complicado, então fazemos a mudança de variável

$$z = at + b = \frac{1}{y}.$$

Assim temos uma nova tabela

	$t_i(hr)$	$y_i(mg)$	z_i	t_i^2	$t_i z_i$
1	0.8	2.5	0.4	0.64	0.32
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	1.5	0.4	2.5	2.25	3.75
4	2.0	0.25	4	4.0	8.0
5	5.0	1/13	13.0	25.0	65.0
$\sum$	10.3		20.9	32.89	78.07

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i \\ \sum t_i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32.89 & 10.3 & 78.07 \\ 10.3 & 5.0 & 20.9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 11.672 & 0.0 & 35.016 \\ 2.06 & 1.0 & 4.18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3.0 \\ 0 & 1 & -2.0 \end{bmatrix}$$

Assim $a = 3$ e $b = -2$. Substituindo na fórmula da hipérbole temos:

$$y = \frac{1}{3t - 2}$$

5. Às $7:00$ horas inicia-se a realização de um experimento. Realizaram-se quatro medidas dos resultados após meia hora, duas, quatro e sete horas. Os resultados anotados foram -0.5^oC, 1.0^oC, 2.7^oC e 6.2^oC. Ajuste com uma reta os dados do experimento utilizando o método dos mínimos quadrados. (Pode considerar o conjunto de pontos $R = \{(2.0, 1.0), (0.5, -0.5), (7.0, 6.2), (4.0, 2.7)\}$).

Resolução: Para utilizar o método dos mínimos quadrados no ajuste com uma reta, determinamo a expressão para a reta: $y = ax + b$.
Então, montamos um sistema sobredimensionado de quatro linhas utilizando cada ponto como $y_i = ax_i + b$.
E posteriormente multiplicamos pela esquerda vezes a matriz transposta necessária.
Por outro lado, já conhecemos o sistema quadrado que dá o resultado desse processo, obtendo:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$$

Portanto, apenas precisamos conhecer esses somatórios. A tabela seguinte permite

$$\begin{array}{cccc} x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} = -\frac{5}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} = -\frac{5}{20} \\ 2 & 1 = \frac{10}{10} & \frac{16}{4} & 2 = \frac{40}{20} \\ 4 & \frac{27}{10} & \frac{64}{4} & \frac{54}{5} = \frac{216}{20} \\ 7 & \frac{62}{10} & \frac{196}{4} & \frac{217}{5} = \frac{868}{20} \\ \frac{27}{2} & \frac{94}{10} & \frac{277}{4} & \frac{1119}{20} \end{array}$$

Que substituindo no sistema matricial dá

$$\begin{bmatrix} \frac{277}{4} & \frac{27}{2} \\ \frac{27}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1119}{20} \\ \frac{94}{10} \end{bmatrix}$$

Aplicando Gauss Jordan para resolver, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{277}{2} & 27 & \frac{1119}{10} \\ \frac{27}{2} & 4 & \frac{94}{10} \end{bmatrix} \sim \quad (-27)* \begin{bmatrix} \frac{379}{8} & 0 & \frac{969}{20} \\ \frac{27}{8} & 1 & \frac{47}{20} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1938}{1895} \\ \frac{27}{8} & 1 & \frac{47}{20} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1938}{1895} \\ 0 & 1 & -\frac{835}{758} \end{bmatrix}$$

Assim $a = \frac{1938}{1895} \cong 1.02$ e $b = -\frac{835}{758} \approx -1.1$. Aproximadamente a reta de ajuste é $y = 1.02x - 1.1$.

6. Um fazendeiro tira água de um poço. Sabendo que está contaminada contrata um serviço de tratamento dessa água. As análises realizadas a cada mês, determinaram a quantidade de contaminantes em miligramas, conforme a seguinte tabela

Mês de análise	1	2	3	5	6
Contaminantes (mg)	12	6	1	0.4	0.1

   (a) Determine pelo método dos quadrados mínimos uma hipérbole que ajuste os dados.
   (b) Qual é o valor esperado para a análise do oitavo mês, segundo o ajuste?

   Resolução:
   Supondo que existe uma hipérbole que ajusta os dados, procuramos

$$y = \frac{1}{ax + b}.$$

   Realizando a mudança de variável $z = \frac{1}{y}$, procuramos a relação: $z = ax + b$.

Observando a tabela de dados temos:

x - Mês	y - Contaminantes	$z = \frac{1}{y}$
1	12	$\frac{1}{12}$
2	6	$\frac{1}{6}$
3	1	1
5	0.4	$\frac{5}{2}$
6	0.1	10
Soma 17	19.5	$\frac{165}{12}$

Logo o ajuste é dos valores de z em uma reta, o que significa resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}$$

Completando a tabela temos:

x_i - Mês	x_i^2	y_i - Contaminantes	$z_i = \frac{1}{y_i}$	$x_i z_i$
1	1	12	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	4	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	9	1	1	3
5	25	0.4	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
6	36	0.1	10	60
Soma $17 = \frac{204}{12}$	$75 = \frac{900}{12}$	$19.5 = \frac{234}{12}$	$\frac{165}{12} = 13.75$	$\frac{911}{12} \approx 75.92$

Assim resolveremos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 75 & 17 & \frac{911}{12} \\ 17 & 5 & \frac{165}{12} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 900 & 204 & 911 \\ 204 & 60 & 165 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{12384}{60} & 0 & \frac{21000}{60} \\ \frac{204}{60} & 1 & \frac{165}{60} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{875}{516} \\ 0 & 1 & \frac{-389}{129} \end{bmatrix}$$

A curva é

$$y = \frac{1}{\frac{875}{516}x - \frac{389}{129}} = \frac{1}{\frac{875}{516}x - \frac{1556}{516}} = \frac{516}{875x - 1556}.$$

Para o oitavo mês temos $y = \frac{516}{5444} = \frac{129}{1361}$.

7. Resolva pelo método de mínimos quadrados.

   (a) O dono de um estabelecimento tabelou abaixo, as vendas realizadas nos últimos quatro meses anteriores ao mês de abril.
   Utilizando o método de ajuste de curvas estudado (mínimos quadrados), deduza o polinômio de grau 2(quadrático) que melhor ajusta esses dados.

Receita bruta mensal (milhares de reais)	40	52	64	80

.

Resolução: A tabela para obter os somatórios é:

i	x_i =mês	y_i =venda	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	40	1	1	1	40	40
2	2	52	4	8	16	104	208
3	3	64	9	27	81	192	576
4	4	80	16	64	256	320	1280
	10	236	30	100	354	656	2104

Para encontrar os coeficientes da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, resolvemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2104 \\ 656 \\ 236 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo por Gauss Jordan temos: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{41}{5} \end{bmatrix}$. Logo o polinômio quadrático é:

$$y = 31 + 8.2x + x^2.$$

(b) O dono conjetura que as vendas para os próximos meses seguirá o comportamento da curva quadrática. Qual é a projeção (valor do polinômio quadrático) de vendas para o mês de maio?
Resolução:
Como estamos no mês de abril, abril seria o quinto mês e maio seria o sexto mês, portanto, basta calcular para $x = 6$, sendo assim: as vendas projetadas para o mês de maio serão: $y(6) = 31+8.2*6+(6)^2 = 116.20$ em milhares, isto é: as vendas projetadas são $R\$116200.00$.