EXPERIÊNCIA 09 : CIRCUITOS DE 2ª ORDEM

1. Objetivo

Até agora vimos circuitos RLC em *regime permanente senoidal*, os quais podem ser analisados e aplicados utilizando os conceitos de impedância, fasores, etc. Mas agora iremos ver como estudar a resposta de circuitos RLC a uma exitação “e(t)” de qualquer formato, não apenas senoidal !

2. Circuitos RLC:

Considere o circuito RLC da Fig.1

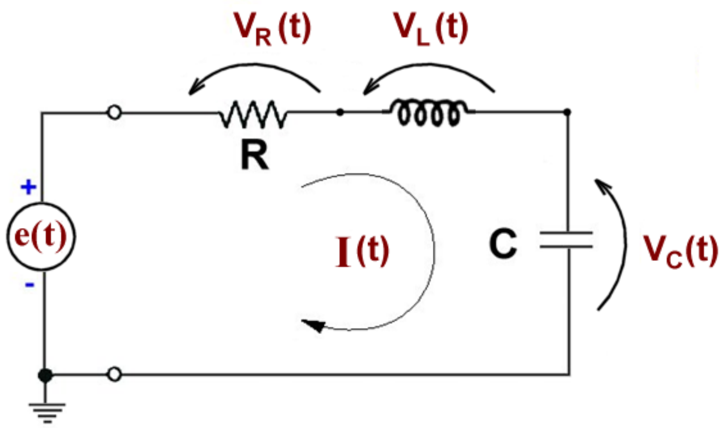

Fig.1

Sabemos, pela 2ª Lei de Kirchhoff que, independente de qual seja a forma da excitação e(t), em cada instante de tempo devemos ter:

$$e(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = RI(t) + V_L(t) + V_C(t) \quad (1)$$

Lembrando que pela definição de corrente elétrica e capacitância do capacitor, teremos:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dV_C(t)}{dt} \quad (2)$$

Por outro lado, no indutor:

$$V_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} \quad (3)$$

que levando em conta (2) fica:

$$V_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dV_C(t)}{dt}\right) = LC\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} \quad (4)$$

Portanto, susbtituindo (2) e (4) em (1), obtemos :

$$e(t) = RC\frac{dV_C(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + V_C(t) \quad (5)$$

Que re-escrevendo fica na forma :

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_C(t) = \frac{1}{LC}e(t) \qquad (6)$$

Ou seja, aplicando a 2ª Lei de Kirchhoff ao circuito RLC série obtemos uma **Equação Diferencial de 2ª ordem** (ordinária e linear) para $V_C(t)$. O que, em outras palavras, significa que:

Qualquer que seja a excitação e(t) aplicada ao circuito RLC série da Fig.1, a queda de tensão $V_C(t)$ resultante no capacitor deve satisfazer a equação (6)

A questão agora é:

Como resolver a equação diferencial de 2ª ordem (6) para determinar $V_C(t)$ para qualquer excitação $e(t)$?

3. Solução da equação diferencial de 2ª ordem para RLC série

Como no caso das equações de 1ª ordem, vistas na aula anterior, a solução mais geral da equação (6), de 2ª ordem, é dada pela soma da solução geral da eq. Homogênea (quando e(t) = 0) e de uma solução particular.

A **Eq. Homogênea** neste caso, será:

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}V_C(t) = 0 \qquad (7)$$

ou:

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}V_C(t) \qquad (8)$$

Note que a solução de (8) é uma função na qual, a soma das 1ª e 2ª derivadas é é igual à própria função, menos de uma constante multiplicativa. Assim, a funçaõ $V_C(t)$ deve ser uma função exponencial do tempo da forma:

$$V_{CH}(t) = Ae^{Bt} \qquad (10)$$

Onde "A" e "B" são constantes a determinar. Assim, as 1ª e 2ª derivadas de $V_C(t)$ serão dadas por:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} = ABe^{Bt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} = AB^2e^{Bt} \qquad (11)$$

Que substituindo na Eq. Homogenea (7) ou (8), obtemos:

$$AB^2e^{Bt} + \tfrac{R}{L}ABe^{Bt} = \tfrac{1}{LC}Ae^{Bt} \qquad (12)$$

De onde obtemos:

$$B^2 + \frac{R}{L}B + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (13)$$

Que é uma equação de 2º grau em "***B***", cujas soluções serão dadadas por:

$$B_1, B_2 = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}} \qquad (14)$$

Para simplificar, consideremos que : $\frac{R}{2L} = \alpha$

E lembremos que : $\frac{1}{LC} = \omega_o^2$

Portanto, (14) pode ser rescrita na forma:

$$B_1, B_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \qquad (15)$$

Onde vemos que existem 3 casos:

1) Quado : $\alpha > \omega_o$ **(Resposta Super Amortecida)**

A constante "***B***" terá 2 valores:

$$B_1, B_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -\alpha \pm \omega_d \qquad (16)$$

Onde:

$$\omega_d^2 = \alpha^2 - \omega_o^2 \qquad (17)$$

Ou seja, a constante "***B***" terá 2 valores reais, dados :

$$B_1 = -\alpha + \omega_d = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (18)$$

e

$$B_2 = -\alpha - \omega_d = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (18)$$

Logo, a solução mais geral da Eq. Homogenea (7) será dada por:

$$V_{CH}(t) = A_1 e^{B_1 t} + A_2 e^{B_2 t} \qquad (20)$$

onde "A_1" e "A_2" são constantes que deverão ser determinadas a partir das condições iniciais.

Note ainda que B_1 e B_2 são sempre negativos e portanto, as exponenciais na solução (20) são exponenciais que decaem com o tempo !

2) Quado : $\boldsymbol{\alpha = \omega_o}$ **(Resposta Criticamente Amortecida)**

A constante "***B***" será dada por:

$$B_1 = B_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L} < 0 \tag{21}$$

Logo, a solução mais geral da Eq. Homogenea (7) será dada por:

$$V_{CH}(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = (A_1 + A_2) e^{-\alpha t} \tag{22}$$

onde "A" é uma constante que deverá ser determinada a partir das condições iniciais. ***Note ainda que a exponencial na solução (22) é uma exponencial que decae com o tempo !***

3) Quado : $\boldsymbol{\alpha < \omega_o}$ **(Resposta Subamortecida ou Oscilatória)**

A constante "***B***" será dada por:

$$B_1, B_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -\alpha \pm i\omega_d \tag{23}$$

Logo, a solução mais geral da Eq. Homogenea (7) será dada por:

$$V_{CH}(t) = A_1 e^{-(\alpha - i\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + i\omega_d)t} \tag{24}$$

onde "A_1" e "A_2" são constantes que deverão ser determinadas a partir das condições iniciais. ***Note ainda que as exponenciais complexas na solução (24) representam funções que oscilam no tempo com frequência*** $\boldsymbol{\omega_d}$ ***!***

Graficamente: