ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos - PSI – EPUSP
PSI 3212 - LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

EXPERIÊNCIA 08 : CIRCUITOS DE 1ª ORDEM

1. Objetivo

Até agora vimos circuitos RC e RL em *regime permanente senoidal*, os quais podem ser analisados e aplicados utilizando os conceitos de impedância, fasores, etc.

Mas agora iremos ver como estudar a resposta de circuitos RC e RL a uma exitação “e(t)” de qualquer formato, não apenas senoidal !

2. Circuitos RC:

Considere o circuito RC da Fig.1a

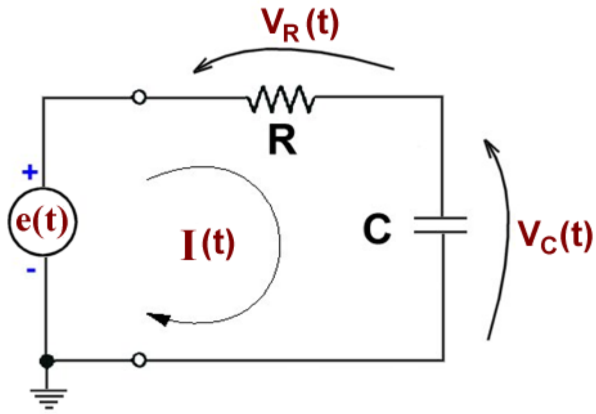


Fig.1a

Sabemos, pela 2ª Lei de Kirchhoff que, independente de qual seja a forma da excitação e(t), em cada instante de tempo devemos ter:

$$e(t) = V_R(t) + V_C(t) = RI(t) + V_C(t) \qquad (1)$$

Além disso, por definição de corrente elétrica e capacitância do capacitor:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad \text{e} \quad Q(t) = CV_C(t) \qquad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1), obtemos:

$$e(t) = RC\frac{dQ(t)}{dt} + V_C(t) \qquad (3)$$

ou :

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_C(t) = \frac{1}{RC}e(t) \qquad (4)$$

Ou seja, aplicando a 2ª Lei de Kirchhoff ao circuito RC série obtemos uma **Equação Diferencial de 1ª ordem** (ordinária e linear) para VC(t). O que, em outras palavras, significa que:

qualquer que seja a excitação e(t) aplicada ao circuito,
a queda de tensão V_C(t) resultante no capacitor deve satisfazer a equação (4)

3. Circuitos RL:

Considere o circuito RL da Fig.2 abaixo:

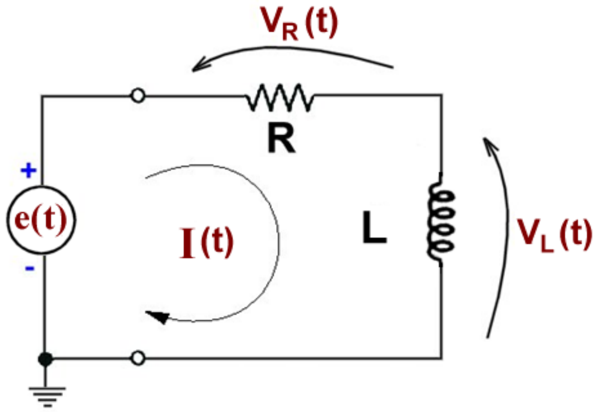


Fig.2

Sabemos, pela 2ª Lei de Kirchhoff que, independente de qual seja a forma da excitação e(t), em cada instante de tempo devemos ter:

$$e(t) = V_R(t) + V_L(t) = RI(t) + V_L(t) \qquad (5)$$

Além disso, sabemos que a tensão no indutor é proporcional à variação da corrente, sendo a “Indutancia” a constante de proporcionalidade. Ou seja, :

$$V_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt} \qquad (6)$$

Assim, substituindo (6) em (5), obtemos:

$$e(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt}$$

ou :

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{1}{L}e(t) \qquad (7)$$

Ou seja, aplicando a 2ª Lei de Kirchhoff ao circuito RL série obtemos uma **Equação Diferencial de 1ª ordem** (ordinária e linear) para V_L(t). O que, em outras palavras, significa que:

qualquer que seja a exitação e(t) aplicada ao circuito,
a corrente no circuito I(t) deve satisfazer a equação (7)

A questão agora é:

Como resolver as equacões diferenciais (4) e (7) para determinar $V_C(t)$ e $I(t)$ para qualquer excitação $e(t)$?

4. Solução da equação diferencial para o caso do circuito RC

A solução geral de uma equação diferencial como a equação (4):

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_C(t) = \frac{1}{RC}e(t) \tag{4}$$

é dada pela soma da solução geral da eq. Homogênea (quando e(t) = 0) e de uma solução particular.

A **Eq. Homogênea** neste caso, será:

$$\frac{dV_{CH}(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_{CH}(t) = 0 \tag{8}$$

ou:

$$\frac{dV_{CH}(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}V_{CH}(t) \tag{9}$$

Note que a solução da eq.(9) é uma função que, quando derivada, permanece igual a menos de uma constante multiplicativa. A funçaõ $V_C(T)$ por tanto, deve ser uma função exponencial do tempo da forma:

$$V_{CH}(t) = Ae^{-Bt} \tag{10}$$

Onde “A” e “B” são constantes a determinar. Substituindo (10) em (9), obtenmos:

$$-ABe^{-Bt} = -\frac{1}{RC}Ae^{-Bt}$$

De onde obtemos: $B = {}^{1}/_{RC}$

Portanto, a solução geral da Eq. Homogênea é:

$$V_{CH}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{11}$$

onde “A” é uma constante que deverá ser determinada a partir das condições iniciais.

Já a solução particular depdende da excitação e(t). Para esta experiência vamos analisar a resposta à função degrau, por ser o caso mais simples para estudar um transitório.

Consideremos então que: $$e(t) = \begin{cases} 0, & para\ t \leq 0 \\ V_o, & para\ t > 0 \end{cases} \tag{12}$$

E escolhamos a solução particular:

$$V_{Cp}(t) = V_o \tag{13}$$

Já que substituindo em (4), vemos que satisfaz a equação:

$$\frac{dV_o}{dt} + \frac{1}{RC}V_o = \frac{1}{RC}Vo$$

ou:

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{V_o} = \boldsymbol{V_o}$$

Determinadas a solução geral da eq. Homogênea (11) e a particular (13), a solução geral de (4) será dada por (11) + (13):

$$\boldsymbol{V_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + V_o} \qquad (14)$$

Falta agora deteminar a constante “A”. Para isto consideremos a condição incial V_C(t=0)=0 (capacitor descarregado):

$$\boldsymbol{V_C(t = 0) = O = Ae^{-\frac{0}{RC}} + V_o}$$

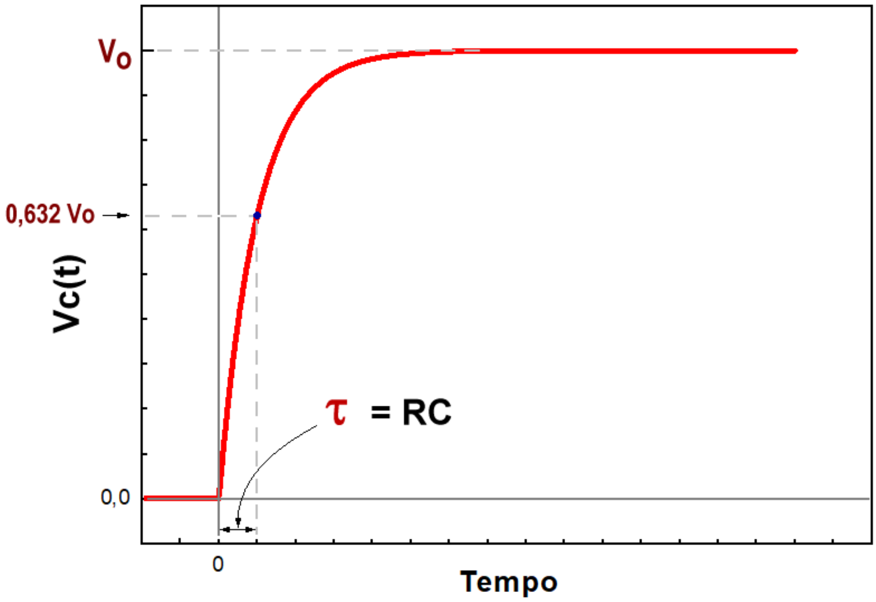
De onde obtemos:

$$\boldsymbol{A = -V_o}$$

Portanto:

$$\boxed{\boldsymbol{V_C(t) = V_o\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}} \qquad (15)$$

Que graficamente:



5. Solução da equação diferencial para o caso do circuito RL

Para o caso do Indutor teremos uma equação totalmente equivalente, mas para a corrente i(t) do circuito:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = \frac{1}{L} e(t) \tag{7}$$

Por similitude, a solução da eq. Homogênea será:

$$I_H(t) = Ae^{-t\frac{R}{L}} \tag{16}$$

A solução da eq. Particular para uma excitação degrau será :

$$I_p(t) = \frac{V_o}{R} \tag{17}$$

Assim, a solução geral de (7) será dada por (11) + (13):

$$I(t) = Ae^{-t\frac{R}{L}} + \frac{V_o}{R} \tag{18}$$

Considerando a condição incial I(t=0) = 0, obtemos :

$$I(0) = A + \frac{V_o}{R} = 0$$

De onde obtemos:

$$A = -\frac{V_o}{R}$$

Portanto:

$$\boxed{I(t) = I_o\left(1 - e^{-t\frac{R}{L}}\right)} \tag{19}$$

onde: $I_o = \frac{V_o}{R}$

Graficamente: