Aula 3 - Análise geométrica

Ardson dos S. Vianna Jr.

Departamento de Engenharia Química - USP

14 de janeiro de 2021

Introdução

exemplo: Resolva o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases} \tag{1}$$

Que pode ser representado por:

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x_i \tag{2}$$

Similar ao sistema com 1 equação: $\dfrac{dy}{dt} = \lambda y$:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \lambda dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \lambda dt \quad \rightarrow \quad ln(y) = \lambda t \; + \; C_1 \quad \rightarrow \quad y = C_2 e^{\lambda t} \tag{3}$$

Introdução

Representando S_{lin} por $S_{lin} = \underline{A}\ \vec{x}$ ou $S_{lin} = A_{ij}\ x_j$, o sistema fica:

$$S_{lin} = A_{ij}\ x_j \quad \rightarrow \quad \frac{dx_i}{dt} = A_{ij}\ x_j \tag{4}$$

Substituindo pela possível solução:

$$\frac{d(\xi_i e^{\lambda t})}{dt} = A_{ij}\ \xi_i e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \xi_i\ \lambda\ e^{\lambda t} \ = \ A_{ij}\ \xi_i e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \xi_i\ (A_{ij} - \lambda I_{ij}) e^{\lambda t} = 0 \tag{5}$$

$$(A_{ij} - \lambda I_{ij}) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{A} - \lambda \underline{I} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{determinante}(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \tag{6}$$

Etapas

- Encontrar os autovalores e autovetores
- Construir o diagrama de fases x_1 *versus* x_2

Definição

Sistema autônomo: é quando as funções F_i que compõem o sistema S não dependem da variável independente, no caso, t; ou seja, $F_i = F_i(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$

$$S_{autonomo} = \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \end{cases} \tag{7}$$

Nó impróprio

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x_i \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (-3-\lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 1 = 0 \tag{9}$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -4 \;\; e \;\; \lambda_2 = -2 \tag{10}$$

Nó impróprio

$\lambda = -4$:

$$\begin{pmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (11)$$

$$x_1 + x_2 = 0 \ \rightarrow \ \text{para } x_1 = 1, vem\ x_2 = -1 \qquad (12)$$

$\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (13)$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \ \rightarrow \ \text{para } x_1 = 1,\ vem\ x_2 = 1 \qquad (14)$$

A solução geral é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \qquad (15)$$

Nó impróprio

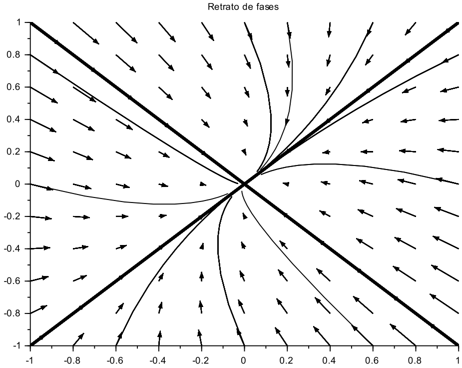

Figura: Retrato de fases para nó impróprio: autovalores reais e negativos

Ponto de sela

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x_i \tag{16}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \quad (1-\lambda)(-1-\lambda) -3 = 0 \quad \rightarrow \tag{17}$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -2 \;\; e \;\; \lambda_2 = 2 \tag{18}$$

Ponto de sela

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \tag{19}$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \ \rightarrow \ \text{para } x_1 = 1, \ vem \ x_2 = 1 \tag{20}$$

$\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & 1 \\ 3 & -1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \tag{21}$$

$$3x_1 + x_2 = 0 \rightarrow \ \text{para } x_1 = 1, \ vem \ x_2 = -3 \tag{22}$$

A solução geral resulta em:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \tag{23}$$

Ponto de sela

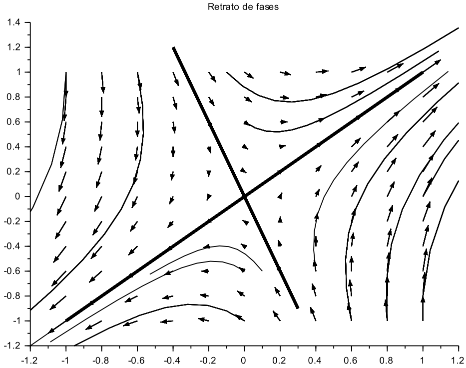

Figura: Retrato de fases para ponto de sela: autovalores reais e de sinais opostos

Ponto de centro

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} x_i \qquad (24)$$

Agora basta resolver o problema de autovetor e autovalor para a solução $x_i = \xi_i e^{\lambda t}$:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 + 9 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -9 \qquad (25)$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-9} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -3i \;\; e \;\; \lambda_2 = 3i \qquad (26)$$

Ponto de centro

$\lambda = -3i$:

$$\begin{pmatrix} -(-3i) & 1 \\ -9 & -(-3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{para } x_1 = 1 \rightarrow x_2 = -3i \tag{27}$$

$\lambda = 3i$:

$$\begin{pmatrix} -3i & 1 \\ -9 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{para } \; x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 3i \tag{28}$$

A solução geral é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix} e^{-3it} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix} e^{3it} \tag{29}$$

Ponto de centro

$$\begin{cases} x_1(t) = & C_3\ cos(3x) + C_4\ sen(3x) \\ x_2(t) = & -3C_3\ sen(3x) + 3C_4\ cos(3x) \end{cases} \tag{30}$$

Primeiro elevamos tudo ao quadrado:

$$\begin{cases} x_1^2(t) = & C_3^2\ cos(3x)^2 + 2\ C_3\ C_4\ cos(3x)sen(3x)\ +\ C_4^2\ sen(3x)^2 \\ x2^2(t) = & 9C_3\ sen(3x)^2 -\ 2\ 9C_3C_4sen(3x)\ cos(3x) +\ 9C_4^2cos(3x)^2 \end{cases} \tag{31}$$

A segunda equação é dividida por 9:

$$\begin{cases} x_1^2(t) = & C_3^2\ cos(3x)^2 + 2\ C_3\ C_4\ cos(3x)sen(3x)\ +\ C_4^2\ sen(3x)^2 \\ \frac{x_2^2(t)}{9} = & C_3\ sen(3x)^2 -\ 2\ C_3\ C_4\ sen(3x)\ cos(3x)\ +\ C_4^2\ cos(3x)^2 \end{cases} \tag{32}$$

Ponto de centro

Somando as duas equações, vem:

$$x_1^2(t)+\frac{x_2^2(t)}{9} = C_3^2\left[cos(3x)^2+sen(3x)^2\right]+0 + C_4^2\left[sen(3x)^2+cos(3x)^2\right] \tag{33}$$

$$x_1^2(t)+\frac{x_2^2(t)}{9} = C_3^2 + C_4^2 = C^{te} \tag{34}$$

Ponto de centro

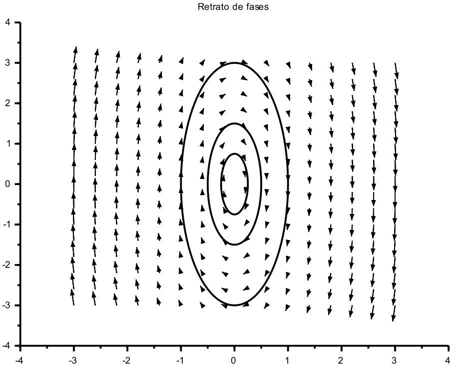

Figura: Retrato de fases para ponto de centro: autovalores imaginários puros

Ponto de espiral

$$\frac{dx_i}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x_i \tag{35}$$

Agora basta resolver o problema de autovetor e autovalor para a solução $x_i = \xi_i e^{\lambda t}$:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow (-1-\lambda)^2 + 1 = 0 \rightarrow (-1-\lambda) = -1 \tag{36}$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1 - i \;\; e \;\; \lambda_2 = -1 + i \tag{37}$$

Ponto de espiral

$\lambda = -1 - i$:

$$\begin{pmatrix} -1-(-1-i) & 1 \\ -1 & -1-(-1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \tag{38}$$

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + ix_2 = 0 \end{cases} \tag{39}$$

Resolvendo o sistema:

$$\text{para} \quad x_1 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = -i \tag{40}$$

Ponto de espiral

$\lambda = -1 + i$:

$$\begin{pmatrix} -1-(-1+i) & 1 \\ -1 & -1-(-1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Agora, resolvendo o sistema:

$$\text{para} \quad x_1 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = i \quad (42)$$

Ponto de espiral

A solução geral é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t} \tag{43}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}[C_1 + C_2]cos(t) + \ i \ [C_1 + C_2]sen(t) \\ x_2(t) = e^{-t}i[C_1 + C_2]cos(t) + \ [C_1 + C_2]sen(t) \end{cases} \tag{44}$$

Elevando ao quadrado, usando igualdades trigonométricas, vêm:

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = r^2 = 2\ e^{-2t}\ [C_3^2\ cos(t)^2 + C_4^2\ sen(t)^2] \tag{45}$$

Tirando a raiz:

$$r = c^{te} e^{-t} \tag{46}$$

Ponto de espiral

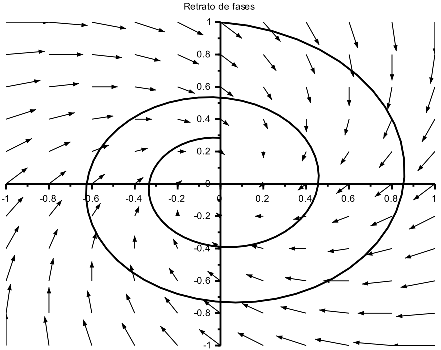

Figura: Retrato de fases para ponto de espiral: autovalores imaginários

Conclusões

autovalores	tipo de ponto crítico	estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	nó impróprio	instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	nó impróprio	estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	ponto de sela	instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	nó próprio ou impróprio	instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	nó próprio ou impróprio	estável
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$	ponto de espiral	
	$a > 0$	instável
	$a < 0$	estável
$\lambda = \pm bi$	ponto de centro	estável

Bibliografia

W.E. Boyce, R.C. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, (2015).