Aula passada: Começamos a estudar rigorosamente e^X.

Definimos norma $\|A\| := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \underset{\text{Definição}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0 \underset{\text{Proposição}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |A_{ij}^{(n)} - A_{ij}| = 0 \quad \forall i,j$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k = A \underset{\text{Definição}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=0}^{n} A_k - A\| = 0 \underset{\text{Proposição}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=0}^{n} A_{ij}^{(k)} - A_{ij}| = 0.$$

Provamos que $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty \Rightarrow \exists \sum_{k=0}^{\infty} A_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k$.

Teorema: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$ sempre converge (sempre $\exists\, e^X$).

Um resulta importante:

Proposição: Se a série $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge, $A_k \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, e $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Logo as séries $\sum_{k=0}^{\infty} BA_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} A_k B$ também convergem e $\sum_{k=0}^{\infty} BA_k = B\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right)$ e $\sum_{k=0}^{\infty} (A_k B) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right) B$.

Demo:

Recordação de análise: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem, então para $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ também converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j a_n^{(j)} = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \quad (*)$$

(TAMBÉM TEMOS $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1 a_n^{(1)} + \dots + \alpha_N a_n^{(N)}) = \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} + \dots + \alpha_N \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(N)}$, SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}$ CONVERGE PARA $\forall j \in \{1, \dots, N\}$)

VAMOS MOSTRAR QUE $\sum_{k=0}^{\infty} BA_k = B\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ $\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right)B\right.$ É ANÁLOGO$\left.\right)$

VEMOS QUE $\sum_{k=0}^{\infty}(BA_k)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} B_{il}A_{lj}^{(k)}\right) \overset{(*)}{=} \sum_{l=0}^{n} B_{il}\sum_{k=0}^{\infty} A_{lj}^{(k)} = \left(B\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right)_{ij}$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} BA_k \quad = \quad B\sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad \blacksquare$$

<u>COROLÁRIO</u>: SEJAM $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ TAIS QUE $AB = BA$ (COMUTAM).

LOGO $e^A B = Be^A$. CONSEQUENTEMENTE $e^A e^B = e^B e^A$.

<u>DEMO</u>: $e^A B = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j\right)B \underset{\text{PROPOSIÇÃO ANTERIOR}}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^jB = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}BA^j \overset{\text{PROP. ANTERIOR}}{\overset{?}{=}} B\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j$

$A^jB = A\cdots AAB = A\cdots ABA = A\cdots BA^2 = \dots = BA^j$

$= Be^A$.

CLARO SE $e^A B = Be^A$, O MESMO ARGUMENTO MOSTRA QUE $e^A e^B = e^B e^A$ $\blacksquare$

---

3) $Y(t) = e^{tA}Y_0$ É SOLUÇÃO DE $\begin{cases} Y'(t) = AY(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$?

Derivação de Matrizes

Seja $A: \mathbb{R} \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma função $\left(A(t) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R}\right)$.

Definição: i) Dizemos que A é contínuo se $t \overset{\text{MAPSTO}}{\mapsto} A_{ij}(t)$ é contínua, $\forall i,j$.

ii) Dizemos que A é derivável se $t \mapsto A_{ij}(t)$ é derivável, $\forall i,j$

iii) Dizemos que A é C^k, $k \in \mathbb{N}$, se $t \mapsto A_{ij}(t)$ é C^k, $\forall i,j$.

↳ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $C^k \Leftrightarrow f$ tem k derivadas contínuas.

OBS: Podemos mostrar que

i) A é contínua $\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

ii) A é derivável $\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \left\| \frac{A(t+h) - A(t)}{h} - B(t) \right\| = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\exists\, B: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q.

Neste caso $B(t) = \frac{d}{dt} A(t)$, $\frac{d}{\ }\begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & \cdots & A_{mn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dA_{11}}{dt}(t) & \cdots & \frac{dA_{1n}}{dt}(t) \\ \vdots & & \\ \frac{dA_{m1}}{dt}(t) & \cdots & \frac{dA_{mn}}{dt}(t) \end{pmatrix}$

- $|A_{ij}(t) - A_{ij}(t_0)| \leq \|A(t) - A(t_0)\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}(t) - A_{ij}(t_0)|$

Propriedades da derivação:

1) $\frac{d}{dt} A = 0$, A é constante

2) $\frac{d}{dt}(\alpha A + \beta B) = \alpha \frac{dA}{dt}(t) + \beta \frac{dB}{dt}(t)$.

3) $\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt}$, $t \mapsto A(t) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
$t \mapsto B(t) \in M_{n\times q}(\mathbb{R})$

Demo: i) $\frac{d}{dt} A_{ij} = 0$, $\forall i,j$, pois A_{ij} é constante, $\forall i,j$.

ii) $\frac{d}{dt}(\alpha A_{ij} + \beta B_{ij}) = \alpha \frac{dA_{ij}}{dt} + \beta \frac{dB_{ij}}{dt}$.

iii) $\frac{d}{dt}(AB)_{ij} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{dA_{ik}}{dt}B_{kj} + A_{ik}\frac{dB_{kj}}{dt}\right)$

$= \left(\frac{dA}{dt}B\right)_{ij} + \left(A\frac{dB}{dt}\right)_{ij}$ $\blacksquare$

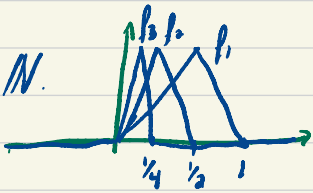
Teorema: A função $t \mapsto e^{tA}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, é C^∞ e $\frac{d^k}{dt^k} e^{tA} = A^k e^{tA}$.

Recordação de análise:

Convergência uniforme: Seja $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que (f_j) converge uniformemente para f no intervalo $[a,b]$ se

$$\lim_{j\to\infty}\left(\sup_{x\in[a,b]} |f_j(x) - f(x)|\right) = 0.$$

Exemplo: $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$.



$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$ — f_j converge pontualmente a 0.

$\lim_{j\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f_j(x) - 0|\right) = 1$ — f_j não converge uniformemente a 0.

$\quad\quad\quad

RESULTADOS IMPORTANTES:

1) SE $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ É CONTÍNUA E f_j CONVERGE UNIFORMEMENTE A f PARA TODO INTERVALO $[-R, R]$, ENTÃO f É CONTÍNUA. (ELON ANÁLISE REAL)

2) SE $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ É DE CLASSE C^k E $\frac{d^m f_j}{dt^m}$ CONVERGEM UNIFORMEMENTE A g_m, $\forall\, 0 \leq m \leq k$, PARA TODO INTERVALO $[-R, R]$, ENTÃO g É C^k E $\frac{d^m g}{dt^m} = g_m$, $\forall\, 0 \leq m \leq k$.

$$\left(k = 1. \quad \begin{array}{l} f_j \longrightarrow g_0 \text{ UNIF. } \forall\, [-R, R] \\ f_j' \longrightarrow g_1 \text{ UNIF. } \forall\, [-R, R] \end{array} \text{, ENTÃO } \underbrace{g_0 \text{ É } C^1 \text{ E } g_0' = g_1}_{\frac{d}{dt} \lim_{j \to \infty} f_j = \lim_{j \to \infty} \frac{df_j}{dt}} \right)$$

3) TESTE M DE WEIERSTRASS: SEJA $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UMA SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES.

SUPONHA QUE $\exists\, M_j \geq 0$ T.Q. $|f_j(x)| \leq M_j$, $\forall x \in [-R, R]$.

SE $\sum_{j=0}^{\infty} M_j < \infty$, ENTÃO A $\underbrace{\text{SÉRIE } \sum_{j=0}^{\infty} f_j \text{ CONVERGE UNIFORMEMENTE}}_{\text{A SEQUÊNCIA } \left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CONVERGE UNIFORMEMENTE EM } [-R, R].}$ PARA UMA FUNÇÃO EM $[-R, R]$

Demo do Teorema:

1) $t \mapsto e^{tA}$ é contínua.

Primeiramente observamos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{k!}t^kA^k\right)_{ij}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k!}\left|\left(t^kA^k\right)_{ij}\right|}_{\left\|\frac{1}{k!}t^kA^k\right\| \leq \frac{1}{k!}|t|^k\|A\|^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|t|^k\|A\|^k$$

Se $t \in [-R,R]$ $\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}R^k\|A\|^k = e^{R\|A\|} < \infty.$

Usamos $\left|\left(\frac{1}{k}t^kA^k\right)_{ij}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{k!}|t|^k\|A\|^k}_{M_k}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty}M_k = e^{R\|A\|} < \infty.$

Pelo teste M de Weierstrass cada termo de e^{tA} converge uniformemente sobre intervalos $[-R,R]$. Logo o limite é contínuo.

2) $t \mapsto e^{tA}$ é C^1.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{k!}t^k(A^k)_{ij}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}k\,t^{k-1}(A^k)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}(A^k)_{ij}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k(A^{k+1})_{ij}$$

Observamos que $\left|\frac{1}{k!}t^k(A^{k+1})_{ij}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{k!}R^k\|A\|^{k+1}}_{M_k}$
se $t \in [-R,R]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} R^k \|A\|^{k+1} = \|A\| e^{R\|A\|} < \infty.$$

(CADA UM DAS ENTRADAS)

LOGO A DERIVADA DE e^{tA} TAMBÉM CONVERGE UNIFORMEMENTE

$\forall t \in [-R, R]$. LOGO e^{tA} É DE CLASSE C^1. ALÉM

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} t^j A^j \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} t^j A^j \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} A^j \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \underbrace{A^{j+1}}_{A A^j} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} A \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} t^j A^j = A e^{tA}.$$

3) $t \mapsto e^{tA}$ É C^∞ E $\frac{d^k}{dt^k}(e^{tA}) = A^k e^{tA}$.

<u>POR INDUÇÃO</u>: $t \mapsto e^{tA}$ É C^k E $\frac{d^j}{dt^j}(e^{tA}) = A^j e^{tA}$, $j \leq k$.

$k = 1$ ✓ OK! JÁ VIMOS

HIPÓTESE DE INDUÇÃO

SE VALE k, ENTÃO $\frac{d^k}{dt^k}(e^{tA}) \overset{?}{=} A^k e^{tA}$

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(e^{tA}) = \frac{d}{dt}\left(A^k e^{tA}\right) = A^{k+1} e^{tA} \quad \boxtimes$$

VALE P/ $k+1$.

TEOREMA: $Y(t) = e^{tA} Y_0$ É SOLUÇÃO DE $Y'(t) = AY(t)$, $Y(0) = Y_0$.

DEMO:

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA} Y_0\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) Y_0 + e^{tA} \underbrace{\frac{d}{dt}(Y_0)}_{0}$$

$$= A e^{tA} Y_0 + 0 = A \underbrace{e^{tA} Y_0}_{Y(t)} = Y(t)$$

$$Y(0) = e^{0A} Y_0 = e^{0} Y_0 = I Y_0 = Y_0$$

$$e^{0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} 0^j = I$$

$$0^0 := I, \quad 0^j = 0, \quad j \geq 1.$$

$\boxed{\frac{3}{2}}$

RESPONDEMOS A QUESTÃO 3.

PERGUNTAS: 1) TEMOS UNICIDADE? MOSTRAREMOS QUE SIM!

2) COMO CALCULAR e^{tA}, A GERAL? PARA MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS É "SIMPLES".