EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS

PEDRO LOPES.

REFERÊNCIAS

1) EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
CLAUS IVO DOERING / ARTUR OSCAR LOPES
(CINZA DO IMPA)

2) EQUAÇÕES DIF. ORDINÁRIAS
SOTOMAYOR, TEXTOS UNIVERSITÁRIOS DO IME

3) EQ. DIF. APLICADAS
DUAIRO

4) EQ. DIF.: TEORIA QUALITATIVA
BARREIRA E VALLS

AVALIAÇÃO: "PROVAS" + "LISTAS"

TEMA: OBJETIVO É ESTUDAR EQUAÇÕES DO TIPO

$$\boxed{\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}}$$

$y: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)).$

VAMOS PERMITIR SISTEMAS.

Hoje: Exemplos (Sotomayor)

Exemplo 1: Para $n=1$. $f(t,y) = f(t)$.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \quad \int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \underset{\substack{\text{Teo. Fundamental} \\ \text{do Cálculo}}}{\Rightarrow} y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds}$$

Exemplo 2: Para $n=1$. $f(t,y) = f(y)$, $f \neq 0$, f contínua.

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{f(y(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\begin{aligned} w &= y(s) \\ dw &= y'(s)\,ds \end{aligned} \Rightarrow \left.\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dw}{f(w)} = (t - t_0)\right\} \quad F(y(t)) = t - t_0.$$

Vamos definir a função $F(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{dw}{f(w)}$

Note que $F'(y) = \dfrac{d}{dy}\left(\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{dw}{f(w)}\right) = \dfrac{1}{f(y)} \neq 0$. $\Rightarrow F$ é bijetor sobre sua imagem $\Rightarrow \boxed{y(t) = F^{-1}(t - t_0)}$

Exemplo 2 i): $f(y) = ay$, $a \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= a\,y(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = a \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)}\,ds = a\int_{t_0}^{t} ds$$

(Quadro)

$$w = y(s) \qquad \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dw}{w} = a\int_{t_0}^{t} ds = a(t-t_0)$$
$$dw = y'(s)\,ds$$

$$\frac{y'(s)\,ds}{y(s)} = \frac{dw}{w}$$

$$\ln(w)\Big|_{y(t_0)}^{y(t)} = a(t-t_0) \Rightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = a(t-t_0) \Rightarrow \frac{y(t)}{y_0} = e^{a(t-t_0)}$$

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{a(t-t_0)}}$$

Exemplo 2 ii)

$f(y) = a y^p$, $p \in \mathbb{N}_0$, $a \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = a\,y(t)^p \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \quad \frac{y'(t)}{y(t)^p} = a \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)^p}\,ds = a\int_{t_0}^{t} ds.$$

$$w = y(s)$$
$$dw = y'(s)\,ds \qquad \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dw}{w^p} = a(t-t_0) \Rightarrow \frac{w^{-p+1}}{1-p}\Big|_{y_0}^{y(t)} = a(t-t_0)$$

$$y(t)^{1-p} - y_0^{1-p} = a(1-p)(t-t_0)$$

$$\boxed{y(t) = \left[y_0^{1-p} + a(1-p)(t-t_0)\right]^{\frac{1}{1-p}}}$$

Exemplo 3:

$f(t, y) = g(t)\,h(y)$, $n = 1$.

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)\,h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{h(y(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dw}{h(w)} = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dw}{h(w)}$$

$$\Rightarrow H(y(t)) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \Rightarrow \boxed{y(t) = H^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right)}$$

! SE H TIVER INVERSA

EXEMPLO 4 (PROBLEMAS LINEARES) $n=1$ $f(t,y(t)) = a(t)\,y(t) + b(t)$

CASO i) $b(t) \equiv 0$. LOGO ESTAMOS NO EXEMPLO ANTERIOR.

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = a(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)}\,ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

$w = y(s)$
$dw = y'(s)ds$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dw}{w} = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \Rightarrow \ln\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)}$$

SE $a(t) \equiv a$, ENTÃO $y(t) = y_0 \exp(a(t-t_0))$.

CASO ii) $b(t)$ NÃO SEJA NULO. VAMOS FAZER VARIAÇÃO DAS CONSTANTES.

SEJA $y(t) = c(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$, NÃO SABEMOS QUEM É c.

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

USAMOS $\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = a(t)$.

$$y'(t) = c'(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + c(t)\,a(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

$$\underbrace{c'(t)\exp(\ldots) + \cancel{c(t)a(t)\exp(\ldots)}}_{y'(t)} = \underbrace{\cancel{a(t)c(t)\exp(\ldots)}}_{a(t)y(t)} + \underbrace{b(t)}_{b(t)}.$$

$$c'(t) = b(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \quad c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right)d\tau.$$

$$y(t_0) = c(t_0)\exp\Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t_0} a(s)ds}_{0}\Big) = c(t_0) \Rightarrow c(t_0) = y(t_0) = y_0.$$

$$\boxed{y(t) = \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds \right) d\tau \right] \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(w)dw \right)}$$

Para $t_0 = 0$, $a(s) \equiv a$.

$$\boxed{y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t b(\tau) e^{a(t-\tau)} d\tau}$$

(VARIAÇÃO DAS CONSTANTES
FÓRMULA DE DUHAMEL.)

EXEMPLO 5: ESTUDAREMOS SISTEMAS, $n \geqslant 1$.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) & y_1(0) = y_1 \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) & y_2(0) = y_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) & y_n(0) = y_n. \end{cases}$$

EXEMPLO 6: EQUAÇÕES DE ORDEM 2.

$$\boxed{\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0) = \bar{y}_0 \\ y'(t_0) = \bar{y}_1 \end{cases}}$$

VAMOS TRANSFORMAR ESTA EQUAÇÃO NUMA EQUAÇÃO DE 1° ORDEM.
DEFINIREMOS 2 NOVAS FUNÇÕES y_1, y_2.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= y'(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1'(t) &= y'(t) = y_2(t) &, \quad y_1(t_0) = y(t_0) = \bar{y}_0 \\ y_2'(t) &= y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) = f(t, y_1(t), y_2(t)) &, \quad y_2(t_0) = y'(t_0) = \bar{y}_1 \end{aligned}$$

CHEGAMOS NO SEGUINTE SISTEMA

$$\boxed{\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) & y_1(t_0) = \bar{y}_0. \\ y_2'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)) & y_2(t_0) = \bar{y}_1 \end{cases}}$$

Vimos que a eq. de 2° ordem azul implica no sistema de 1° ordem amarelo.

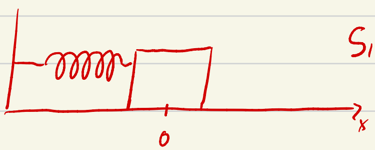
Se y_1 e y_2 são soluções do sistema amarelo, então $y(t) = y_1(t)$ é solução do problema azul.

De fato,
$$y_1' = y_2 \qquad y_1(t_0) = \bar{y}_1$$
$$y_2' = f(t, y_1, y_2) \qquad y_2(t_0) = \bar{y}_2$$

$$y'(t) = y_2$$
$$y''(t) = y_2'(t) = f(t, y_1(t), y_2(t)) = f(t, y(t), y'(t)) \quad \text{e} \quad y(t_0) = y_1(t_0) = \bar{y}_1$$
$$y'(t_0) = y_1'(t_0) = y_2(t_0) = \bar{y}_2.$$

PROBLEMAS AMARELO E AZUL SÃO EQUIVALENTES!

__Exemplo 6.)__



Sistema massa-mola.

Lei de Hooke $F = -kx$. Logo a 2° lei de Newton nos dá

$mx''(t) = -kx(t)$ (Força = massa × aceleração). Condições iniciais $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$

$$q(t) = x(t) \qquad q'(t) = x'(t) = \frac{1}{m} m x'(t) = \frac{1}{m} p(t), \quad q(t_0) = x(t_0) = x_0$$
$$p(t) = mx'(t) \qquad p'(t) = mx''(t) = -kx(t) = -kq(t), \quad p(t_0) = mx'(t_0) = mv_0$$

Obtemos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} q'(t) = \frac{1}{m} p(t), & q(t_0) = x_0 \\ p'(t) = -kq(t), & p(t_0) = mv_0 \end{cases}$$

Em termos matriciais, temos
$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix}}_{Y'(t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p(t) \\ -kq(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} \qquad Y'(t) = AY(t)$$

Exemplo 6ii (Resistência)

$$m x''(t) = -k x(t) - b x'(t)$$
$$x(0) = x_0 , \quad x'(0) = v_0$$

$$q(t) = x(t) \qquad q'(t) = x'(t) = \frac{p(t)}{m}$$
$$p(t) = m x'(t) \qquad p'(t) = m x''(t) = -k x(t) - b x'(t) = -k q(t) - \frac{b}{m} p(t)$$
$$q(0) = x(0) = x_0$$
$$p(0) = m x'(0) = m v_0$$

Em termos matriciais

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix}}_{Y'(t)} = \begin{pmatrix} \frac{p(t)}{m} \\ -k q(t) - \frac{b}{m} p(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)}$$

$$\boxed{Y'(t) = A Y(t)}$$

Exemplo 7: Ordens + altas

$$\boxed{\begin{aligned} y^{(m)}(t) &= f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \\ y(t_0) &= \bar{y}_0 \\ &\vdots \\ y^{(m-1)}(t_0) &= \bar{y}_{m-1} \end{aligned}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) & y_1(t_0) &= \bar{y}_0 \\ &\vdots & &\vdots \\ y_{m-1}'(t) &= y_m(t) & y_m(t_0) &= \bar{y}_{m-1} \\ y_m'(t) &= f(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \end{aligned}}$$

Definimos $y_1(t) = y(t), \ y_2(t) = y'(t), \dots, y_m(t) = y^{(m-1)}(t)$.

$$y_1'(t) = y'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y''(t) = y_3(t)$$
$$\vdots$$
$$y_{m-1}'(t) = y^{(m-1)}(t) = y_m(t)$$
$$y_m'(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) = f(t, y_1(t), \dots, y_m(t))$$

AULA QUE VEM, VAMOS COMEÇAR SISTEMAS LINEARES

$$\boxed{f_j(y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_j}$$