

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES. DEIXE CLARO QUE VOCÊ SABE O QUE ESTÁ FAZENDO!!

NOTAÇÃO: Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \text{ onde } A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

1. (2,0) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y - 7z, -3x + y - 14z, 4x + 2y + 2z).$$

- Determine a matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $T = T_A$.
- Determine uma base de $\text{Ker } T$ e uma base de $\text{Im } T$.
- Verifique se o vetor $v = (7, 8, -3, 14)$ está na $\text{Im } T$. Em caso afirmativo, determine $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = v$.

(a) A matriz $A = [T]_{\text{can}}$.

$$T(e_1) = (2, 1, -3, 4)$$

$$T(e_2) = (1, 2, 1, 2)$$

$$T(e_3) = (1, -7, 1, 2)$$

$$A = \begin{array}{c|cc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ \hline \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(b) \text{Ker } T = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0\} \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

O núcleo de T é o espaço das soluções do sistema linear homogêneo cuja matriz é A .

Vamos escalonar A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -7 \\ -3 & 1 & -14 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 + 3L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{array}]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 7 & -35 \\ 0 & -6 & 30 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{array}{l} L_3 - 7L_2 \\ L_4 + 6L_2 \end{array}]{L_2 \div -3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um sistema equivalente é

$$x + 2y - 7z = 0$$

$$y - 5z = 0$$

$$\Rightarrow y = 5z$$

$$x = -2(5z) + 7z$$

$$x = -3z$$

$$\text{Logo } \text{Ker } T = [(-3, 5, 1)].$$

Do mesmo escalonamento temos que

$$\text{Im } T = [(2, 1, -3, 4), (1, 2, 1, 2)] \text{ já que}$$

$$\text{Im } T = [T(e_1), T(e_2), T(e_3)] \text{ e } T(e_3) \text{ é CL de } T(e_1) \text{ e } T(e_2).$$

$$\text{Base de Ker } T = \{(-3, 5, 1)\}$$

$$\text{Base de Im } T = \{\underbrace{(2, 1, -3, 4)}_{u_1}, \underbrace{(1, 2, 1, 2)}_{u_2}\}$$

(c) Verificar se v é CL de u_1 e u_2 .

$$(7, 8, -3, 14) = a \underbrace{(2, 1, -3, 4)}_{T(e_1)} + b \underbrace{(1, 2, 1, 2)}_{T(e_2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2a + b \\ 8 = a + 2b \\ -3 = -3a + b \\ 14 = 4a + 2b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$b = 7 - 2a$$

$$8 = a + 2(7 - 2a)$$

$$8 = a + 14 - 4a$$

$$-6 = -3a \Rightarrow a = 2$$

$$b = 3$$

a e b satisfazem as 2 outras equações:

$$-3 = -3(2) + 3$$

$$14 = 4(2) + 2(3)$$

Logo

$$(7, 8, -3, 14) = 2T(e_1) + 3T(e_2)$$

$$\stackrel{T \text{ linear}}{=} T(2e_1 + 3e_2) = T(2, 3, 0)$$

2. (2,0) Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os autovalores de A .

(b) Determine (se existir) uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_A .

(c) Determine (se existir) uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Escreva a matriz P e a matriz D .

$$\begin{aligned} (a) \quad P_A(\lambda) &= -\det(A - \lambda I_3) = -\det \begin{bmatrix} 7-\lambda & -5 & 5 \\ 0 & -\lambda & 7 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda-7) [\lambda^2 - 6\lambda - 7] = (\lambda-7)^2 (\lambda+1) \end{aligned}$$

Assim, os autovalores são

$$\lambda_1 = 7$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$(b) \quad \lambda_1 = 7 \quad m_a(7) = 2$$

Vamos determinar $m_g(7) = \dim(\mathbb{R}^3(7))$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} y - z &= 0 \\ y &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } \mathbb{R}^3(7) &= \{ (x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \\ &= \left[(1, 0, 0), (0, 1, 1) \right] \end{aligned}$$

$$m_g(7) = 2 = m_a(7)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad m_a(-1) = 1 \quad (= m_g(-1))$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} y + 7z &= 0 \\ 8x - 5y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = -7z \quad \Rightarrow 8x = -35z - 5z \quad \Rightarrow$$

$$\mathbb{R}^3(-1) = \left[(-5, -7, 1) \right], \quad x = -5z$$

3. (2,0) Considere a cônica de equação

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 6y + F = 0.$$

$$A = 3 = B$$

$$C = -1$$

$$D = 1 \quad E = -3$$

(a) Reconheça e esboce a cônica para $F = 3$.

(b) Reconheça e esboce a cônica quando $F = -29$.

(a) 1º passo: Ver se existe uma translação de eixos que elimina os termos lineares da equação.

Para isso, é preciso ver se existem h, k tais que

$$\begin{cases} 3h - k + 1 = 0 \\ -h + 3k - 3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o

sistema temos que $k = 1$ e $h = 0$.

Fazendo $X = x + h$ e $Y = y + k$, a equação da cônica fica

$$3X^2 + 3Y^2 - 2XY + F' = 0$$

$$\text{onde } F' = F + 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$= F - 3$$

$$F' = F - 3$$

$$(b) \quad M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_M(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

$$R^2(2) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad v_1 = (1, 1)$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$\mathbb{R}^2(4) = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$$v_2 = (-1, 1)$$

$$v_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$P = [T_M]_{\text{can}}$$

$$P^{-1} = P^t$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P^t M P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} P^t$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$$

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2U^2 + 4V^2$$

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

No novo sistema de coordenadas a equação da cônica é:

$$2U^2 + 4V^2 = 3 - F$$

Se $F = 3$, temos $2U^2 + 4V^2 = 0 \Rightarrow U = V = 0$.

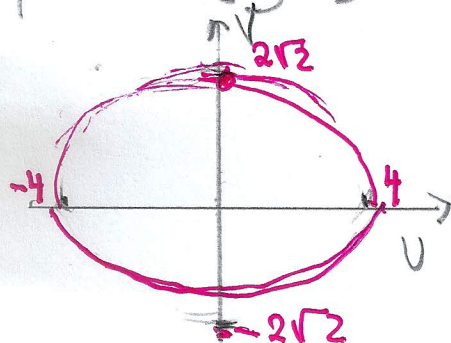
Isto é um ponto $(U, V) = (0, 0)$ que é a origem do sistema (U, V) , que é a mesma origem que a do sistema (x, y) que é o ponto $(0, 1)$.

Se $F = -29$ temos

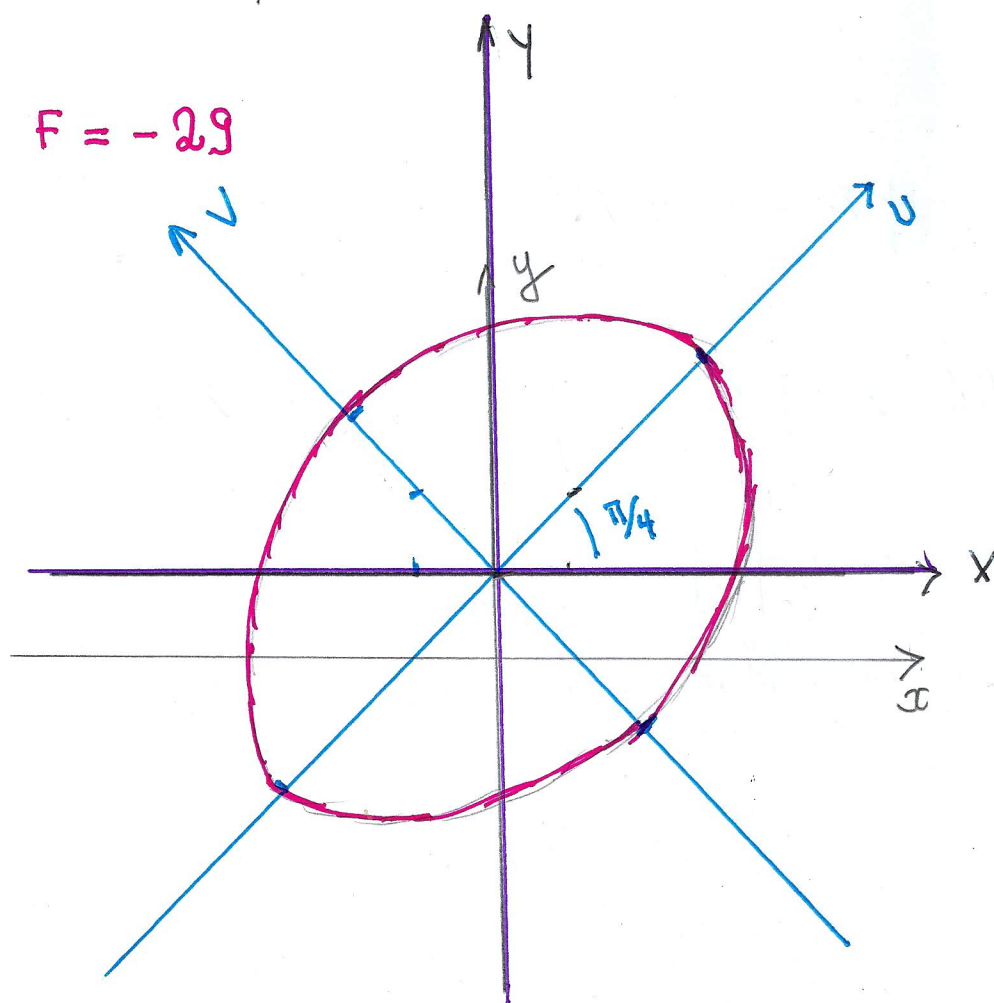
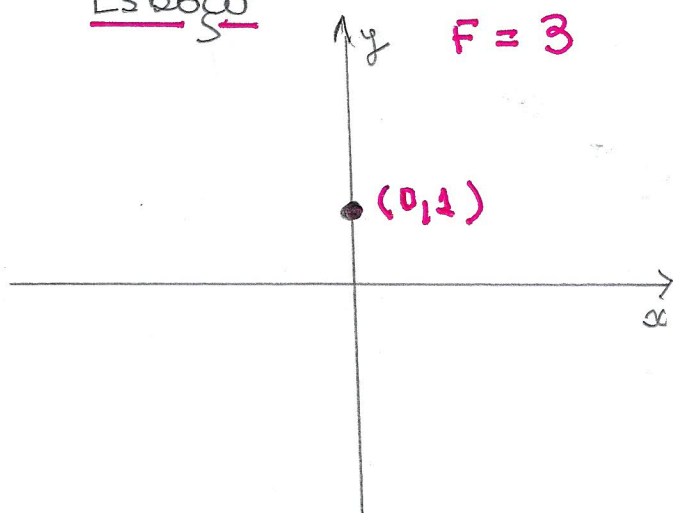
$$2U^2 + 4V^2 = 30$$

$$\frac{U^2}{16} + \frac{V^2}{8} = 1$$

ELIPSE



Esbozo



4. (1,5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear **não nula** e $T \neq I$, onde I é a identidade tal que $T \circ T = T$.

(a) Como T é não nula, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) \neq 0$ e como T não é a identidade, existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) \neq u$. Mostre que $B = \{T(v), u - T(u)\}$ é LI.

Sugestão: Faça uma combinação linear dos 2 vetores do conjunto B e iguale a 0. Daí, aplique a T a essa combinação linear.

(b) Qual é a matriz de T na base B ?

$$\begin{aligned} T \neq 0 &\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(v) \neq 0. \\ T \neq I &\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(u) \neq u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sejam } w_1 &= u - T(u) \\ w_2 &= T(v) \end{aligned}$$

Mostrar que $\{w_1, w_2\}$ é LI.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $aw_1 + bw_2 = 0$.

Mostrar que $a = b = 0$.

$$0 = aw_1 + bw_2$$

$$0 = T(0) = aT(w_1) + bT(w_2)$$

Agora usar a hipótese que $T \circ T = T$.

$$T(T(w_1)) = T(u - T(u)) = T(u) - \underbrace{T(T(u))}_{=0} = 0 \quad \text{Hipótese}$$

$$T(w_2) = T(T(v)) \stackrel{\text{hipótese}}{=} T(v) = w_2$$

$$\text{Logo } 0 = a \underbrace{T(w_1)}_{=0} + b \underbrace{T(w_2)}_{w_2} = 0$$

$$\text{Logo } bw_2 = 0 \text{ e } w_2 \neq 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$\text{Assim, } aw_1 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$B = \{w_1, w_2\}$ é uma base, pois $w_1 \neq 0$ e $\{w_1, w_2\}$ é LI e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

(b) $[T]_B$

$$\text{Assim } [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(w_1) = 0 = 0w_1 + 0w_2$$

$$T(w_2) = w_2 = 0w_1 + 1w_2$$

5. (2,5) As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Justifique, provando as que forem verdadeiras ou dê um contra-exemplo ou um argumento lógico mostrando que é falsa!

(a) A matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

é diagonalizável quais que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Podem existir transformações lineares $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^9$ e $S: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$ tais $S \circ T$ é bijetora.

(c) Não existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ com $\text{Ker} T = \text{Im} T$.

(a) Se $a = b = c = 0$, a matriz é nula e já é então diagonal.

Se pelo menos um deles entre a, b ou c é $\neq 0$, então o posto dessa matriz é 1.

Logo, se $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$, $\dim \text{Im } T_A = 1$

e portanto, $\dim \text{Ker } T_A = 2$.

$\text{Ker } T_A = \mathbb{R}^3(0) \Rightarrow m_g(0) = 2$.

$$\text{Ker } T_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a(x+y+z) = b(x+y+z) = c(x+y+z) = 0\}$$

$$= \{(0, 0, 0)\}$$

Logo, $\text{Ker } T_A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

$$\text{Im } T_A = \{(a, b, c)\}$$

Note que $\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (a+b+c) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Assim, como $\vec{v} = (a, b, c) \neq 0$ é um autovetor de T_A associado ao autovalor $\lambda = (a+b+c)$.

O polinômio característico da matriz é então $p(x) = x^3(x - (a+b+c))$

Diagonalizável

→ Se $a+b+c \neq 0$, então $m_a(a+b+c) = m_g(a+b+c) = 1$

Não diag. Se $a+b+c = 0$, então $p(x) = x^3$ e $m_a(0) = 3 \neq m_g(0)$

A afirmação é FALSA.

Um exemplo $a=1$ $b=-1$ e $c=0$,

$$(b) \quad \mathbb{R}^7 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^9 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^7$$

9

Suponha que SoT é bijetora

É sim possível, então a afirmação é VERDADEIRA

Exemplo,

$$T: \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^9$$

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 0, 0)$$

$$S: \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^7$$

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

$$\text{Então } SoT(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

$$= S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 0, 0) =$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

$$\text{Logo } (SoT)(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^7$$

e $SoT = I$ (identidade) que é claramente bijetora.

(c) VERDADEIRA

Teorema do Núcleo e da Imagem

$$\text{Se } \text{Ker } T = \text{Im } T \Rightarrow \dim \mathbb{R}^7 = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T \\ = 2 \dim \text{Ker } T,$$

Logo $\dim \mathbb{R}^7 = 7$ seria um número par. **ABSURDO.**