MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear

2ª Prova -19/12/2020

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES. DEIXE CLARO QUE VOCÊ SABE O QUE ESTÁ FAZENDO!!

NOTAÇÃO: Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por $T_A(x_1,...,x_n) = (y_1,..,y_m)$ onde $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

1. **(2,0)** Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z,t) = (x+3y+10z+t, 2x-2y+4z-6t, -x+3y+2z+8t).$$

   (a) Determine a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $T = T_A$.

   (b) Determine uma base de Ker$T$ e uma base de ImT.

   (c) Verifique se o vetor $v = (0,4,3)$ está na ImT. Em caso afirmativo, determine $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(u) = v$.

(a) $T(e_1) = (1, 2, -1)$

$T(e_2) = (3, -2, 3)$

$T(e_3) = (10, 4, 2)$

$T(e_4) = (1, -6, 8)$

$$A = [T]_{can} = \begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

(b) $\text{Ker}\,T = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Ker T é o espaço das soluções do sistema linear homogêneo cujá matriz é A.

Vamos então escalonar a matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3+L1]{L2 \leftrightarrow L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & -8 & -16 & -8 \\ 0 & 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3/3]{L2/8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-2L2} \begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & & T(e_4) \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um sistema equivalente é

$$\begin{aligned} x + 3y + 10z + t &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Assim $t = 0$, $y = -2z$, $x = 6z - 10z = -4z$

$\text{Ker}\,T = [(-4, -2, 1, 0)]$

$\text{Im}\,T = [T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)]$. Uma base de Im T é $\{(1,2,-1), (3,-2,3), (1,-6,8)\}$

(c) Ver se existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $aT(e_1) + bT(e_2) + cT(e_4) = (0,4,3)$ →

Resolvendo o sistema

$a(1,2,-1) + b(3,2,-3) + c(1,-6,8) = (0,4,3)$

obtemos $a = \frac{14}{3}$, $b = -\frac{5}{3}$ e $c = \frac{1}{3}$.

Mas $a\,T(e_1) + b\,T(e_2) + c\,T(e_4) =$

$T(a e_1 + b e_2 + c e_4)$

Logo $u = \frac{14}{3}(1,0,0,0) - \frac{5}{3}(0,1,0,0) + \frac{1}{3}(0,0,0,1)$

$= \boxed{\left(\frac{14}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)}.$

2. **(2,0)** Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Determine (se existir) uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_A.

(c) Determine (se existir) uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Escreva a matriz P e a matriz D.

(a) $p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

$= (3+\lambda)\left[2\lambda + \lambda^2 - 3\right]$

$= (3+\lambda)(\lambda+3)(\lambda-1)$

$= (3+\lambda)^2(\lambda-1)$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$.

$\boxed{m_a(\lambda_1) = 1}$ e $m_a(\lambda_2) = 2$.

(b) $\mathbb{R}^3(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Temos que $x = 0$ e $y = z$

$\mathbb{R}^3(1) = [(0,1,1)]$.

$\mathbb{R}^3(-3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$= \{(x,y,z) \mid 2x + 3y + z = 0\}$

$z = -2x - 3y \qquad (x, y, -2x-3y) = x(1,0,-2) + y(0,1,-3)$.

$\mathbb{R}^3(-3) = [(1,0,-2), (0,1,-3)]$

$m_g(-3) = 2$.

Assim T_A é diagonalizável, e uma base de autovetores é

$B = \{(0,1,1), (1,0,-2), (0,1,-3)\}$

(c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

3. **(2,0)** Considere a cônica de equação

$$\underbrace{7x^2}_{A} - \underbrace{y^2}_{B} + \underbrace{6xy}_{2C} + \underbrace{28x}_{2D} + \underbrace{12y}_{2E} + F = 0.$$

(a) Reconheça e esboce a cônica para $F = -4$.

(b) Reconheça e esboce a cônica quando $F = 28$.

(a) 1º passo Ver se existe uma translação de eixos que elimina os termos lineares da equação.

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos que ver se existem h e $k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 7h + 3k + 14 = 0 \\ 3h - k + 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $h = -2$ e $k = 0$.

Fazendo $X = x + h$ e $Y = y + k$ a equação da cônica fica

$$\boxed{7X^2 - Y^2 + 6XY + F' = 0}, \text{ onde}$$

$$F' = 7\cdot(-2)^2 - 0^2 + 6(-2)\cdot 0 + 28(-2) + 12\cdot 0 + F$$

$$\boxed{F' = -28 + F}$$

2º passo

$$p_M(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 - 9$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda - 16$$
$$= (\lambda - 8)(\lambda + 2)$$

$$\mathbb{R}^2(8) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$v_1 = (3, 1)$

$u_1 = \left(3/\sqrt{10},\ 1/\sqrt{10}\right)$

$$\mathbb{R}^2(2) = \left\{ (x, y) \mid \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$v_2 = (-1, 3)$

$v_2 = \left(-1/\sqrt{10},\ 3/\sqrt{10}\right)$

Se $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ então $P^{-1} = P^t$ e

$$P^t M P = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M = P \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P^t =$$

Logo $7x^2 - y^2 + 6xy = [x \;\; y]\, M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$= [x \;\; y]\, P \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Fazemos $P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$

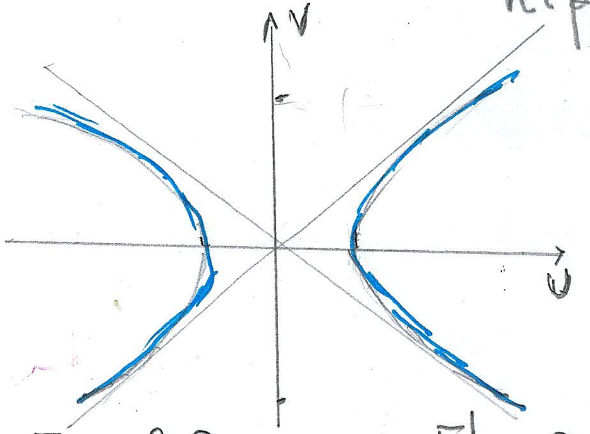
Logo $7x^2 - y^2 + 6xy = 8U^2 - 2V^2$.

(a) Se $F = -4$, $F' = -32$

$0 = 7x^2 + y^2 + 6xy + F' = 8U^2 - 2V^2 - 32 = 0$

$8U^2 - 2V^2 = 32$

$\dfrac{U^2}{4} - \dfrac{V^2}{16} = 1$ A cônica é uma hipérbole

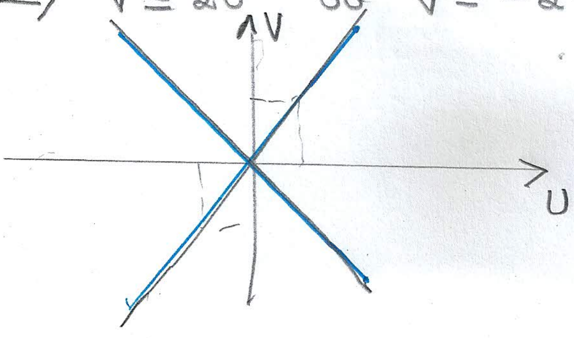


(b) Se $F = 28 \Rightarrow F' = 0$

$8U^2 - 2V^2 = 0$

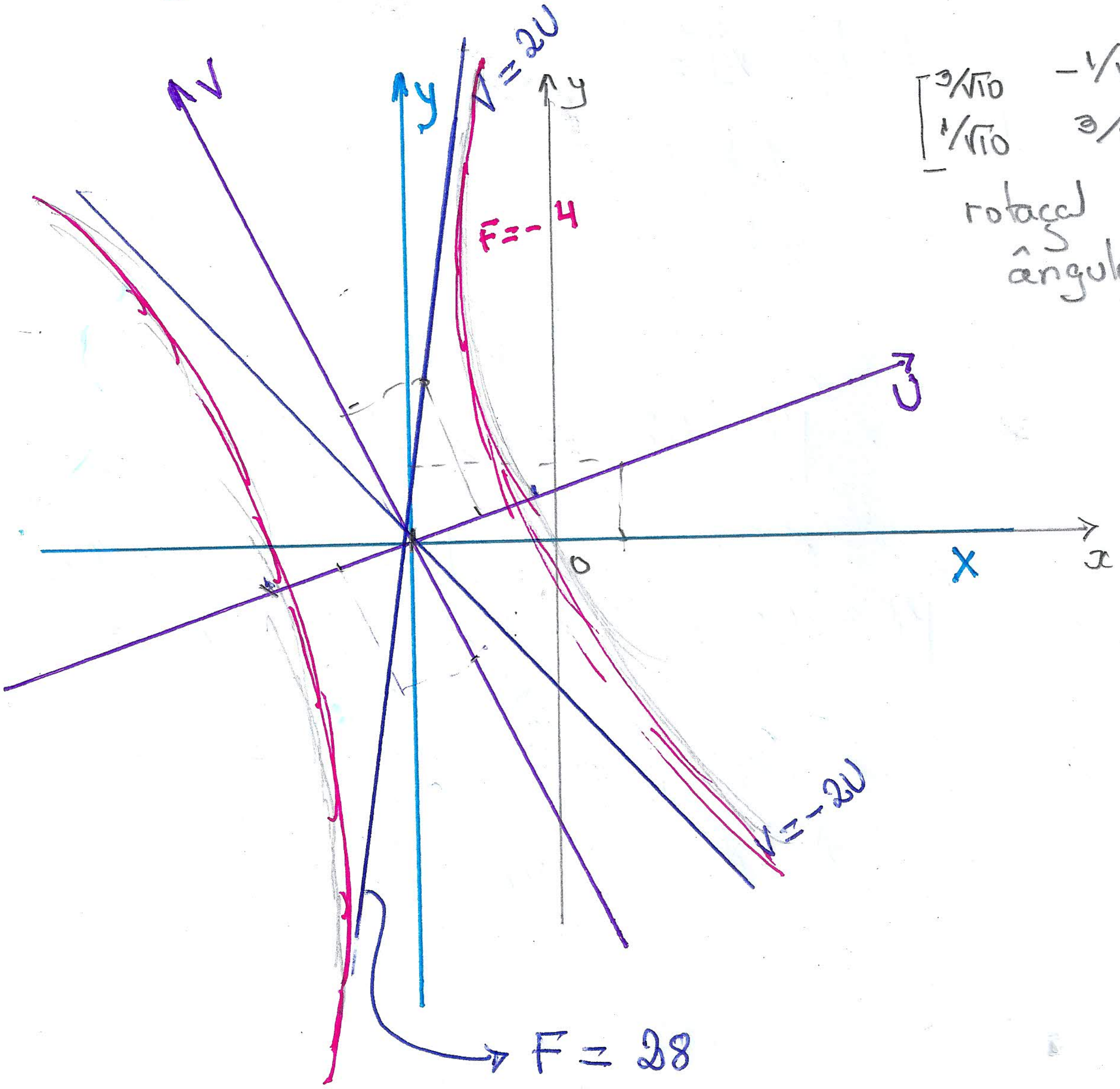
$4U^2 - V^2 = 0 \iff (2U - V)(2U + V) = 0$

$\Rightarrow V = 2U$ ou $V = -2U$



retas concorrentes

Esboço:



$\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ é

rotação de ângulo $\theta = \operatorname{arctg} 3$

4. **(1,5)** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear **não nula** e tal que $T \circ T = 0$.

(a) Como T é não nula, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) \neq 0$. Mostre que $B = \{v, T(v)\}$ é LI.
Sugestão: Faça uma combinação linear dos 2 vetores do conjunto B e iguale a 0. Daí, aplique a T a essa combinação linear.

(b) Qual é a matriz de T na base B?

(a) $T \neq 0$ e $T \circ T = 0$ $\longrightarrow$ Hipótese

Seja $v \in V$ tq $T(v) \neq 0$

Mostrar que se $w_1 = v$ e $w_2 = T(v)$ então $\{w_1, w_2\}$ é LI.

Suponha que

$$\boxed{a w_1 + b w_2 = 0} \quad (*)$$

Então $a T(w_1) + b T(w_2) = T(0) = 0$

Mas $T(w_1) = T(v) = w_2$

$T(w_2) = T(T(v)) = 0$

↳ hipótese: $T \circ T = 0$

Logo $a \underbrace{T(w_1)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a = 0.$

Voltando em $(*)$

$b \underbrace{w_2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow b = 0.$

Logo $a = b = 0$ e $\{w_1, w_2\}$ é LI.

Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $B = \{w_1, w_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(b) $T(w_1) = w_2 = 0 w_1 + 1 w_2$

$T(w_2) = 0 = 0 w_1 + 0 w_2$

Logo $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

5. **(2,5)** As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Justifique, provando as que forem verdadeiras ou dê um contra-exemplo ou um argumento lógico mostrando que é falsa!

(a) A matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

é diagonalizável quais que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Podem existir transformações lineares $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ e $S : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ tais $S \circ T$ é bijetora.

(c) Não existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ com $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Im}T$.

(a) Se $a = b = c = 0$, então a matriz é nula e já é diagonal.

Suponha então que pelo menos um deles é $\neq 0$. Então a matriz
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$ tem posto $\underline{1}$, ou seja, $\dim \mathrm{Im} T_A = \underline{1}$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim \mathrm{Ker}\, T_A = 2$.

Mas $\mathrm{Ker}\, T_A = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T_A(v) = 0 \}$
$= \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid T_A(v) = 0 v \} = \mathbb{R}^3(0)$.

Logo 0 é um autovalor de T_A e $m_g(0) = 2$.

Agora, note que $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (a+b+c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim, $(1,1,1)$ é um autovetor de T_A com autovalor $\lambda = a+b+c$.

Assim, $p_A(x) = x^2 (x - (a+b+c))$.

Se $a+b+c \neq 0$, então A é diagonalizável.

Se $a+b+c = 0$, então $p_A(x) = x^3$ e $m_a(0) = 3 \neq 2 = m_g(0)$ e então não é diagonalizável.

A afirmação é **FALSA**, pois não vale para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemplo. $a = 2 \quad b = c = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ não é diagonalizável

$\operatorname{Ker} T_A = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$

é um plano

$(1, 1, 1) \in \operatorname{Ker} T_A$.

(b) $\mathbb{R}^9 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^7 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^9$

FALSA

Como $\dim \mathbb{R}^9 > \dim \mathbb{R}^7$, temos que T NÃO é injetora (Teo do Núcleo e da Imagem)

Logo existe $v \neq 0$, $v \in \operatorname{Ker} T$.

Mas esse mesmo $v \in \operatorname{Ker}(S \circ T)$, pois

$(S \circ T)(v) = S(T(v)) = S(0) = 0$.

Logo $S \circ T$ não é injetora e portanto não é bijetora.

(c) **FALSA**

Defina $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z, t) = (0, 0, x, y)$$

$$\operatorname{Ker} T = \{(x, y, z, t) \mid x = y = 0\} = [e_3, e_4]$$

$$\operatorname{Im} T = [e_3, e_4]$$