

## Capítulo 13

# Exemplo de Aplicação MIMO

*Neste capítulo, apresenta-se um exemplo completo de projeto. A planta é um sistema MIMO com duas entradas e duas saídas que descreve um sistema de controle de vazão e temperatura de ar, conforme apresentado no artigo...*

### 13.1 Descrição do Modelo e suas Incertezas

O modelo foi obtido através da técnica de identificação de sistemas. Supõe-se que o sistema é linear e invariante no tempo. Portanto, pode-se assumir o princípio da superposição, de modo que

$$G_{1,4}(s) = \frac{k_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta_1 s}$$

$$G_{2,4}(s) = \frac{k_2}{(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)} e^{-\theta_2 s}$$

$$G_3(s) = \frac{k_3}{(\tau_5 s + 1)(\tau_6 s + 1)} e^{-\theta_3 s}$$

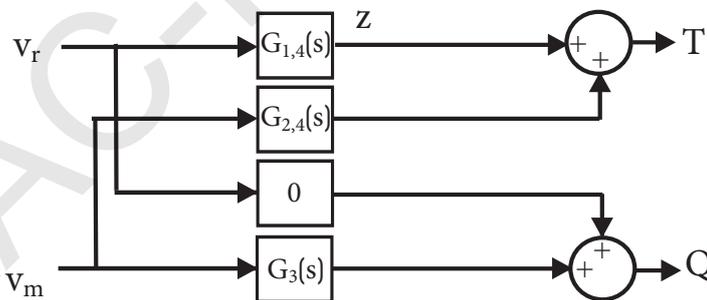


Figura 13.1: Planta de controle de vazão e temperatura

Os parâmetros são apresentados na tabela 13.1 sendo que são invariantes no tempo. Alguns deles possuem incertezas, e outros são bem conhecidos.

As funções de transferência incertas, já com os atrasos aproximados por Padê:

Tabela 13.1: Parâmetros conhecidos

parâmetro	valor	incerteza
$k_1$	0.1358	50 %
$\tau_1$	3.7589	0
$\tau_2$	0.0379	0
$\theta_1$	0.096	0
$k_2$	0.1132	0
$\tau_3$	4.4903	50 %
$\tau_4$	0.5896	0
$\theta_2$	0.5000	0
$k_3$	12.647	0
$\tau_5$	0.3621	0
$\tau_6$	0.0680	100 %
$\theta_3$	0.0240	70 %

$$\bar{G}_{1,4}(s) = \frac{k_1(1 + 0.5\delta_1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \frac{1 - \frac{\theta_1}{2}s}{1 + \frac{\theta_1}{2}s} = G_0(s)(1 + 0.5\delta_1)$$

$$\bar{G}_{2,4}(s) = \frac{k_2}{[\tau_3(1 + 0.5\delta_3)s + 1](\tau_4 s + 1)} \frac{1 - \frac{\theta_2}{2}s}{1 + \frac{\theta_2}{2}s} = G_1(s) \frac{1}{\tau_3(1 + 0.5\delta_3)s + 1}$$

$$\bar{G}_3(s) = \frac{k_3}{(\tau_5 s + 1)[\tau_6(1 + \delta_6)s + 1]} \frac{1 - \frac{\theta_3(1+0.7\delta_\theta)}{2}s}{1 + \frac{\theta_3(1+0.7\delta_\theta)}{2}s}$$

Trabalhando-se um pouco mais nestas funções, tem-se:

$$\bar{G}_{1,4}(s) = G_0(s)(1 + 0.5\delta_1)$$

$$\bar{G}_{2,4}(s) = \bar{G}_1(s) \frac{1}{\tau_3(1 + 0.5\delta_3)s + 1} = \underbrace{\bar{G}_1(s)}_{G_1(s)} \frac{1}{\tau_3 s + 1} \frac{1}{\left[1 + \frac{0.5s}{\tau_3 s + 1} \delta_3\right]}$$

$$\bar{G}_3(s) = \underbrace{\frac{1 - 0.5\theta_3 s}{\tau_5 s + 1} \frac{k_3}{1 + 0.5\theta_3 s} \frac{1}{\tau_6 s + 1}}_{G_2(s)} (1 - \bar{w}_\theta \delta_\theta) \frac{1}{1 + w_6 \delta_6} \frac{1}{1 + w_\theta \delta_\theta}$$

onde  $w_6(s) = \frac{s}{\tau_6 s + 1}$ ,  $w_\theta(s) = \frac{0.35\theta_3 s}{1 + 0.5\theta_3 s}$  e  $\bar{w}_\theta(s) = \frac{0.35\theta_3 s}{1 - 0.5\theta_3 s}$

Para encontrar a matriz  $P(s)$  da planta estendida, precisamos incluir os demais pesos, que são os pesos dos erros  $w_{p1}(s)$  e  $w_{p2}(s)$  (já que temos dois sinais de erro de referência) e dois pesos de controle  $w_{u1}(s)$  e  $w_{u2}(s)$ . Deste modo, precisamos retirar da planta estendida apresentada na Fig. 13.2 os parâmetros incertos e acrescentar os demais pesos, além de acrescentar os sinais de erro. O resultado é apresentado na Fig. 13.3.

A partir da Fig. 13.3, tem-se as seguintes equações relacionando entradas e saídas:



$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 G_0 & 0 \\ 0 & -w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 G_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{w}_\theta G_2 \\ 0 & 0 & -w_6 & -w_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_6 G_2 \\ 0 & 0 & -w_\theta & -w_\theta & -w_\theta & 0 & 0 & 0 & w_\theta G_2 \\ \hline -w_{p1} & +w_{p1} & 0 & 0 & 0 & w_{p1} & 0 & -w_{p1} G_0 & -w_{p1} G_1 \\ 0 & 0 & w_{p2} & w_{p2} & w_{p2} & 0 & w_{p2} & 0 & -w_{p2} G_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{u1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{u2} \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -G_0 & -G_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -G_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ r_1 \\ r_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

Ainda é possível separar os pesos em diferentes matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ e_1 \\ e_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & G_2 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -G_0 & -G_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -G_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -G_0 & -G_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -G_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ r_1 \\ r_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

Se definirmos então as matrizes peso por:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{w}_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_\theta \end{bmatrix}, \quad W_p = \begin{bmatrix} w_{p1} & 0 \\ 0 & w_{p2} \end{bmatrix}, \quad W_u = \begin{bmatrix} w_{u1} & 0 \\ 0 & w_{u2} \end{bmatrix}$$

de modo que por ser escrito por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c|c} E_{5 \times 5} & 0_{5 \times 2} & G_{5 \times 2} \\ F_{2 \times 5} & I_{2 \times 2} & -H_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ F_{2 \times 5} & I_{2 \times 2} & -H_{2 \times 2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Finalmente, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W\mathbf{d} \\ W_p\mathbf{e} \\ W_u\mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c|c} WE_{5 \times 5} & 0_{5 \times 2} & WG_{5 \times 2} \\ W_p F_{2 \times 5} & W_p & -W_p H_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 2} & W_u \\ F_{2 \times 5} & I_{2 \times 2} & -H_{2 \times 2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

De modo a fazer o projeto sensibilidade mista, despreza-se as 5 primeiras linhas e 5 primeiras colunas, de modo que se tem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} W_p & -W_p H_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & W_u \\ \hline I_{2 \times 2} & -H_{2 \times 2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Prof. Diego Colón  
LAC-PTC-EPUSP

Prof. Diego Colón  
LAC-PTC-EPUSP

# Referências Bibliográficas

- [dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the  $\mu$ -analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.

- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.
- [ZDG95] Khemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1995.

Prof. Diego Colón  
LAC-PTC-EPUSP