GABARITO PROVA SUBSTITUTIVA.

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2+b^2x^4}dx, \qquad a>0,\ b>2$$

Solução

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2+b^2x^4}dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{x}{a^2(1+\frac{b^2}{a^2}x^4)}dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^2}\int_0^t \frac{x}{(1+\frac{b^2}{a^2}x^4)}dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^2}\frac{a}{2b}\int_0^t \frac{\frac{2b}{a}x}{(1+\frac{b^2}{a^2}x^4)}dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2ab}\int_0^{\frac{b}{a}t^2} \frac{du}{1+u^2} \qquad \text{Fazendo } u=\frac{b}{a}x^2. \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2ab}\left[\operatorname{arctg}(u)\right]_0^{\frac{b}{a}t^2} \\
&= \frac{1}{2ab}\lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{bt^2}{a}\right)-\operatorname{arctg}(0)\right] \\
&= \frac{1}{2ab}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4ab}
\end{aligned}$$

2. O gabarito de **Derivadas parciais** está no Gabarito da P2, páginas iii a viii.

3. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3}{ax^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}, \qquad a=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

(a) A função $f(x,y)$ é contínua no porto $(0,0)$?

Definiç ão Uma função f de duas variáveis reais a valores reais é contínua no ponto de acumulação $(x_0,y_0)\in D_f$ se, e somente se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Então,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{ax^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x.\frac{x^2}{ax^2+y^2}=0=f(0,0),$$

pois

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

e

$$0\le x^2\le ax^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad 0\le \frac{x^2}{ax^2+y^2}\le 1, \quad (\forall\, a>0).$$

Portanto a função é contínua.

(b) A função $f(x,y)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$?
Definição. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, A aberto de $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Sabe-se que se a função é diferenciável no ponto (x_0, y_0), então $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{ax^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{ax^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Sejam $a = \frac{1}{a}$ e $b = 0$. Aplicando a definição de diferenciabilidade para f no ponto $(0,0)$ obtemos

$$\begin{aligned}
E(h,k) &= f(0+h, 0+k) - f(0,0) - ah - bk \\
&= \frac{h^3}{ah^2+k^2} - 0 - \frac{1}{a}h - 0k \\
&= \frac{h^3}{ah^2+k^2} - \frac{h}{a} \\
&= \frac{ah^3 - h(ah^2+k^2)}{a(ah^2+k^2)} \\
&= \frac{ah^3 - ah^3 - hk^2}{a(ah^2+k^2)} \\
&= -\frac{hk^2}{a(ah^2+k^2)},
\end{aligned}$$

logo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} -\frac{\frac{hk^2}{a(ah^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} -\frac{hk^2}{a\,(ah^2+k^2)\,\sqrt{h^2+k^2}} \qquad (\star)$$

consideramos a curva contínua $\gamma(t) = (t,t)$ fazemos a composição dela com a função do limite acima $(\star)$ e calculando novamente o limite, desta vez quando t tende a zero, obtemos respectivamente

$$\lim_{t\to 0} -\frac{t^3}{a(at^2+t^2)\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} -\frac{t^3}{a(a+1)\,t^2\,\sqrt{2}\;|t|}$$

Calculando os limites laterais no ponto 0 obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} -\frac{t^3}{a(a+1)\,t^2\,\sqrt{2}\ |t|} &= \lim_{t\to 0^+} -\frac{t^3}{a(a+1)\,t^2\,\sqrt{2}\,t} \qquad t>0\\
&= \lim_{t\to 0^+} -\frac{t}{a(a+1)\sqrt{2}\,t}\\
&= -\frac{1}{a(a+1)\sqrt{2}} < 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^-} -\frac{t^3}{a(a+1)\,t^2\,\sqrt{2}\ |t|} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{t^3}{a(a+1)\,t^2\,\sqrt{2}\,t} \qquad t<0\\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{a(a+1)\sqrt{2}t}\\
&= \frac{1}{a(a+1)\sqrt{2}} > 0.
\end{aligned}$$

Sendo os limites laterais em 0 diferentes

$$-\frac{1}{a(a+1)\sqrt{2}} \neq \frac{1}{a(a+1)\sqrt{2}}$$

o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} -\frac{\frac{hk^2}{a(a^2h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

não existe. Portanto não satisfaz a definição de diferenciabilidade e a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

(c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $(1,\sqrt{3})$.

Seja $\left\|(1,\sqrt{3})\right\| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ logo $\vec{u} = (\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+\alpha t, 0+\beta t) - f(0,0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(\alpha t)^3}{a(\alpha t)^2+(\beta t)^2} - 0}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha^3 t^3}{(a\alpha^2+\beta^2)t^3}\\
&= \frac{\alpha^3}{a\alpha^2+\beta^2}
\end{aligned}$$

Substituindo $(\alpha,\beta) = (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \frac{\frac{1}{2}^3}{a\frac{1}{2}^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{a\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2(a+3)}$$

Os cálculos para os casos seguintes são análogos ao este item.

4. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+ay^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad a = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

   (a) A função $f(x,y)$ é contínua no porto $(0,0)$?
   (b) A função $f(x,y)$ é diferenciável no porto $(0,0)$?
   (c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $(1,\sqrt{3})$.

5. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{ax^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad a = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

   (a) A função $f(x,y)$ é contínua no porto $(0,0)$?
   (b) A função $f(x,y)$ é diferenciável no porto $(0,0)$?
   (c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $(\sqrt{3},1)$.

6. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+ay^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad a = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

   (a) A função $f(x,y)$ é contínua no porto $(0,0)$?
   (b) A função $f(x,y)$ é diferenciável no porto $(0,0)$?
   (c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $\vec{u}$ é o versor de $(\sqrt{3},1)$.