Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 17
Semana 14/12-18/12
Aplicação de Séries de Fourier: equação de Laplace

Exercício 1.

a) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, satisfazendo as condições de contorno

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Resolução.

(a) Supondo que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ leva a duas E.D.O.:

$$X^{''} - \lambda X = 0 \quad \text{e} \quad Y^{''} + \lambda Y = 0,$$

onde a constante λ é o parâmetro de separação.

As condições $u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$ implicam as condições de contorno

$$X(0) = 0 \quad \text{e} \quad X(a) = 0.$$

Assim, as soluções não triviais para $X^{''} - \lambda X = 0$ que satisfazem estas as condições de contorno são possíveis apenas se $\lambda = -(n\pi/a)^2$, $n = 1, 2 \ldots,$ e as soluções correspondentes para $X(x)$ são múltiplos de $\sin(n\pi x/a)$.

As condições de contorno $u(x,0) = 0$ implica que $Y(0) = 0$. Resolvendo $Y^{''} - (n\pi/a)^2 Y = 0$ sujeito a essa condição, obtemos que $Y(y)$ deve ser múltiplo de $\sinh(n\pi y/a)$.

As soluções fundamentais são então

$$u_n(x,y) = \sin(n\pi x/a) \sinh(n\pi y/a), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

que satisfaz a equação de Laplace e as condições de fronteira homogêneas.

Suponha que a solução possa se representada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/a) \sinh(n\pi y/a),$$

onde os coeficientes c_n são determinados a partir da condição de contorno

$$u(x,b) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/a)\sinh(n\pi b/a),$$

de onde segue que

$$c_n \sinh(n\pi b/a) = (2/a)\int_0^a g(x)\sin(n\pi x/a)dx, \; n = 1, 2, \ldots .$$

(b) Substituindo $g(x)$ na equação de c_n, temos

$$\begin{aligned} c_n \sinh(n\pi b/a) &= (2/a)\left[\int_0^{a/2} x\sin(n\pi x/a)dx + \int_{a/2}^{a}(a-x)\sin(n\pi x/a)dx\right] \\ &= [4a\sin(n\pi/2)]/n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

então $c_n = [4a\sin(n\pi/2)]/[n^2\pi^2\sinh(n\pi b/a)]$. Substituindo esses valores para c_n na série acima produz a solução

$$u(x,y) = \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh(n\pi b/a)}\sin(n\pi x/a)\sinh(n\pi y/a).$$

Na Figura 1 à esquerda é desenhado o gráfico u versus x para vários valores de y e à direita o gráfico de u versus y para vários valores de x, para o caso em $a = 3$ e $b = 1$.

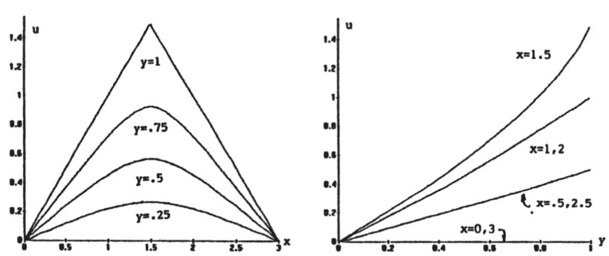

Figure 1: (crédito: E. C. Boyce, R. C. DiPrima)

A Figura 2 à esquerda é o gráfico da solução u. As curvas de nível de u plano xy são mostradas na Figura 2 à direita.

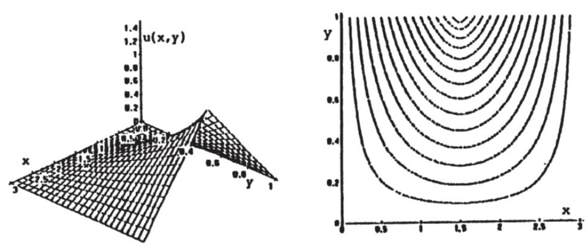

Figure 2: (crédito: E. C. Boyce, R. C. DiPrima)