

SEGUNDA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

A prova é individual. A soma de pontos é 10,5 (tem 0,5 extra). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

Boa Prova!

Exercício 1. (1,25 ponto) a) Resolva a seguinte equação para $x > 0$:

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 1, \quad u(x, x) = 0.$$

(1,25 ponto) b) Resolva a seguinte equação:

$$2u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 3, \quad u(x, 0) = 1.$$

(1 ponto) c) Seja $u :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação:

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + 2y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Ache curvas em $]0, \infty[\times]0, \infty[$ sobre as quais a solução u da equação acima é constante.

Exercício 2. (1,2 ponto) a) Resolva a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - 3 \frac{\partial u}{\partial t \partial x}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Dica: Procure soluções com a forma abaixo, em que α e β são constantes reais distintas:

$$u(x, t) = f(x + \alpha t) + g(x + \beta t).$$

(1,2 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Suponha que $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ seja igual a 0 fora de $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ e $h(x) > 0$ para $x \in B(0, 1)$. Seja $x_0 \notin B(0, 1)$. Ache os valores de $t \geq 0$ para os quais $u(x_0, t) \neq 0$ nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$. Qual a diferença entre as dimensões 1 e 2 e a dimensão 3? (Dica: Use as fórmulas de d'Alembert, Poisson e Kirchhoff)

(1,1 ponto) c) Sejam dadas funções $a_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, f e g funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Suponha também que exista $a_0 > 0$ tal que $\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Considere a equação

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Suponha que $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma solução de suporte compacto, ou seja, existe $R > 0$ tal que $u(x, t) = 0$ para todo $|x| \geq R$. Mostre que a função $E : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definida abaixo é não-crescente ($E'(t) \leq 0$):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right] dx, \quad t \in [0, T].$$

Conclua que existe no máximo uma solução de suporte compacto da Equação (0.1).

Exercício 3. Considere a equação abaixo:

$$(0.2) \quad \begin{cases} I) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + a \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \\ II) & u(x_1, 0) = f(x_1) \\ III) & \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = g(x_1) \end{cases}$$

(1,25 ponto) a) Seja $a = 1$ e defina $U_0 = u$, $U_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $U_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$. Escreva a equação acima da forma equivalente

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(U_0, U_1, U_2) = \left(F_1 \left(U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right), F_1 \left(U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right), F_1 \left(U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right) \right).$$

Encontre as funções F_1 , F_2 e F_3 . Qual deve ser a condição inicial $(U_0(x_1, 0), U_1(x_1, 0), U_2(x_1, 0))$?

(1,25 ponto) b) Seja $a = 1$, f e g duas funções reais analíticas numa vizinhança de zero. É verdade que sempre existe uma solução real-analítica u numa vizinhança da origem? Se sim, escreva $u(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$ e ache uma relação entre os coeficientes de $c_{j(k+2)}$ em função de $c_{j(k+1)}$ e $c_{(j+2)k}$. Se $f(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_1^j$, $f_j \in \mathbb{R}$, e $g(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_1^j$, $g_j \in \mathbb{R}$, determine os coeficientes c_{j0} e c_{j1} , para $j \in \mathbb{N}_0$, em função de f_j e g_j .

(1,0 ponto) c) Seja $a = 0$. É verdade que para todas as funções reais-analíticas f e g sempre existe uma solução real analítica u numa vizinhança de zero da Equação (0.2)? Se sim, determine os coeficientes da solução $u(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$, $c_{jk} \in \mathbb{R}$, em termos de f_j e g_j . Se não for, mostre porque isso nem sempre é possível. (Dica: Seja $f(x_1) = g(x_1) = 1$ para todo $x_1 \in \mathbb{R}$. O que a equação I nos diz quando $x_2 = 0$?).

FORMULÁRIO. (NEM TUDO É NECESSÁRIO)

Algumas soluções de EDO: Se $f' = gf \implies f(x) = Ce^{\int_0^x g(s)ds}$.

Definição 4. (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $F : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Logo

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_U \nabla \cdot F(x) dx,$$

em que $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de U .

Proposição 5. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e f e g duas funções em $C^1(\overline{U})$. Logo

$$(0.3) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = - \int_U f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x),$$

em que $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal a ∂U no ponto x e que aponta para fora de U .

Definição 6. Uma curva integral do campo $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $V = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ é um caminho $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação diferencial $x'(t) = V(x(t))$. Assim, se $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, então

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Proposição 7. Seja $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva integral com imagem no aberto $W \subset U$ e $u : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x))$, $x \in W$. Logo $v = u \circ x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação $v'(t) = f(x(t), v(t))$. Em particular, se $f = 0$, então $u \circ x$ é constante.

Teorema 8. Considere a equação abaixo:

$$(0.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Suponha que g e h estejam em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, temos

i) $n = 1$ Fórmula de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

ii) $n = 2$ Fórmula de Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \oint_{B(x, t)} \left(\frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \right) dy.$$

iii) $n = 3$ Fórmula de Kirchhoff:

$$u(x, t) = \oint_{\partial B(x, t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)) dS(y).$$

Teorema 9. (Cauchy-Kowaleski) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\Gamma \subset U$ uma superfície real-analítica. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) &= f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)), & x \in U \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) &= g_j(x), & x \in \Gamma \quad j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

Vamos supor que:

i) $a_\alpha : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma função real analítica.

ii) $f : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função real analítica.

iii) $g_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função real analítica, para todo $j \in \{0, \dots, m-1\}$.

Assim, se $x_0 \in U$ for tal que $\det \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial^1 u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$, então existe um aberto $V \subset U$ que contém x_0 e uma função real analítica $u : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ que é solução do problema em V .