

**SEGUNDA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)**

A prova é individual. A soma de pontos é 10,5 (tem 0,5 extra). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

**Boa Prova!**

**Exercício 1.** (1,25 ponto) a) Resolva a seguinte equação:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -xu(x, y), \quad u(x, x) = x.$$

(1,25 ponto) b) Resolva a seguinte equação:

$$u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 1, \quad u(x, 0) = 1.$$

(1,0 ponto) c) Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução da equação:

$$y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - 4x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Ache curvas em  $\mathbb{R}^2$  sobre as quais a solução  $u$  da equação acima é constante.

**Exercício 2.** (1,2 ponto) a) Resolva a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) - 20 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Dica: Procure soluções com a forma abaixo, em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais distintas:

$$u(x, t) = f(x + \alpha t) + g(x + \beta t).$$

(1,2 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Suponha que  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  seja igual a 0 fora de  $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$  e  $h(x) > 0$  para  $x \in B(0, 1)$ . Seja  $x_0 \notin B(0, 1)$ . Ache os valores de  $t \geq 0$  para os quais  $u(x_0, t) \neq 0$  nos casos em que  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ . Qual a diferença entre as dimensões 1 e 2 e a dimensão 3? (Dica: Use as fórmulas de d'Alembert, Poisson e Kirchoff)

(1,1 ponto) c) Considere a seguinte equação no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  limitado e de classe  $C^1$ :

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & x \in U, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0 & x \in \partial U, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) & x \in U \end{aligned}.$$

Mostre que a energia definida abaixo é não-crescente ( $E'(t) \leq 0$ ):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right] dx, \quad t \in [0, T]$$

e conclua que existe no máximo uma solução da Equação (0.1).

**Exercício 3.** Considere o seguinte problema:

$$(0.2) \quad \begin{aligned} u'(t) &= f(t)u(t) \\ u(0) &= c_0 \end{aligned},$$

em que  $c_0 \in \mathbb{R}$  e  $f$  é uma função real-analítica numa vizinhança de 0, ou seja,  $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j$ , em que  $f_j \in \mathbb{R}$ , e  $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j| R^j < \infty$ , para um certo  $R > 0$ .

(1 ponto) a) Procure uma solução da Equação (0.2) da forma  $u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$  e determine  $c_{j+1}$  em termos de  $c_k$  e  $f_k$ , com  $k \leq j$ . (Dica: Substitua as séries de  $f$  e  $u$  e iguale os coeficientes multiplicados pela mesma potência de  $t$ ).

(0,5 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$(0.3) \quad \begin{aligned} U'(t) &= F(t)U(t) \\ U(0) &= C_0 \end{aligned} .$$

Suponha que  $F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j t^j$ , em que  $F_j \geq 0$ , e  $\sum_{j=0}^{\infty} |F_j| r^j < \infty$ , para um certo  $0 < r \leq R$ . Suponha que a Equação (0.3) tenha uma solução real analítica numa vizinhança do zero da forma  $U(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j$ . Mostre por indução que, se  $|c_0| \leq C_0$  e  $|f_j| \leq F_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ , então  $|c_j| \leq C_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

(1 ponto) c) Mostre que existe uma constante  $C > 0$  e uma função  $F(t) = \frac{CR}{R-t}$  tal que  $f \ll F$ , ou seja,  $|f_j| \leq F_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

(1 ponto) d) Ache uma solução do tipo  $U(t) = \beta (R-t)^\alpha$  (essas funções são reais-analíticas!) da equação abaixo:

$$\begin{aligned} U'(t) &= \frac{CR}{R-t} U(t) \\ U(0) &= |c_0| \end{aligned}$$

e use os resultados dos itens anteriores para provar o seguinte resultado: Existe uma função  $u$  real-analítica numa vizinhança de zero que resolve a Equação (0.2).

FORMULÁRIO. (NEM TUDO É NECESSÁRIO)

Algumas soluções de EDO: Se  $f' = gf \implies f(x) = Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ .

**Definição 4.** (Teorema da Divergência) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ . Logo

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_U \nabla \cdot F(x) dx,$$

em que  $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o vetor normal unitário que aponta para fora de  $U$ .

**Proposição 5.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $f$  e  $g$  duas funções em  $C^1(\bar{U})$ . Logo

$$(0.4) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = - \int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x),$$

em que  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  é a normal a  $\partial U$  no ponto  $x$  e que aponta para fora de  $U$ .

**Definição 6.** Uma curva integral do campo  $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $V = (a_1(x), \dots, a_n(x))$  é um caminho  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfaz a equação diferencial  $\mathbf{x}'(t) = V(\mathbf{x}(t))$ . Assim, se  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , então

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

**Proposição 7.** Seja  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva integral com imagem no aberto  $W \subset U$  e  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de  $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x))$ ,  $x \in W$ . Logo  $v = u \circ \mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução da equação  $v'(t) = f(\mathbf{x}(t), v(t))$ . Em particular, se  $f = 0$ , então  $u \circ \mathbf{x}$  é constante.

**Teorema 8.** Considere a equação abaixo:

$$(0.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Suponha que  $g$  e  $h$  estejam em  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Logo, temos

i)  $n = 1$  Fórmula de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

ii)  $n = 2$  Fórmula de Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \left( \frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) dy.$$

iii)  $n = 3$  Fórmula de Kirchoff:

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)) dS(y).$$

**Teorema 9.** (Cauchy-Kowaleski) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $\Gamma \subset U$  uma superfície real-analítica. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1}u(x)) \partial^\alpha u(x) &= f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1}u(x)), & x \in U \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) &= g_j(x), & x \in \Gamma \quad j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

Vamos supor que:

i)  $a_\alpha : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  é uma função real analítica.

ii)  $f : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica.

iii)  $g_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica, para todo  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ .

Assim, se  $x_0 \in U$  for tal que  $\det \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial^1 u(x_0), \dots, \partial^{m-1}u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$ , então existe um aberto  $V \subset U$  que contém  $x_0$  e uma função real analítica  $u : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  que é solução do problema em  $V$ .