

SEGUNDA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

A prova é individual. A soma de pontos é 10,5 (tem 0,5 extra). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

Boa Prova!

Exercício 1. (1,25 ponto) a) Resolva a seguinte equação para $x > 0$:

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 1, \quad u(x, x) = 0.$$

(1,25 ponto) b) Resolva a seguinte equação:

$$2u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 3, \quad u(x, 0) = 1.$$

(1 ponto) c) Seja $u :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação:

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + 2y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Ache curvas em $]0, \infty[\times]0, \infty[$ sobre as quais a solução u da equação acima é constante.

Exercício 2. (1,2 ponto) a) Resolva a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) - 20 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Dica: Procure soluções com a forma abaixo, em que α e β são constantes reais distintas:

$$u(x, t) = f(x + \alpha t) + g(x + \beta t).$$

(1,2 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}.$$

Suponha que $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ seja igual a 0 fora de $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ e $h(x) > 0$ para $x \in B(0, 1)$. Seja $x_0 \notin B(0, 1)$. Ache os valores de $t \geq 0$ para os quais $u(x_0, t) \neq 0$ nos casos em que $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$. Qual a diferença entre as dimensões 1 e 2 e a dimensão 3? (Dica: Use as fórmulas de d'Alembert, Poisson e Kirchoff)

(1,1 ponto) c) Considere a seguinte equação no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ limitado e de classe C^1 :

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) & x \in U, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0 & x \in \partial U, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) & x \in U \end{aligned}.$$

Mostre que a energia definida abaixo é não-crescente ($E'(t) \leq 0$):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_U \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right] dx, \quad t \in [0, T]$$

e conclua que existe no máximo uma solução da Equação (0.1).

Exercício 3. Considere o seguinte problema:

$$(0.2) \quad \begin{aligned} u'(t) &= f(t)u(t) \\ u(0) &= c_0 \end{aligned},$$

em que $c_0 \in \mathbb{R}$ e f é uma função real-analítica numa vizinhança de 0, ou seja, $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j$, em que $f_j \in \mathbb{R}$, e $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j| R^j < \infty$, para um certo $R > 0$.

(1 ponto) a) Procure uma solução da Equação (0.2) da forma $u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$ e determine c_{j+1} em termos de c_k e f_k , com $k \leq j$. (Dica: Substitua as séries de f e u e iguale os coeficientes multiplicados pela mesma potência de t).

(0,5 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$(0.3) \quad \begin{aligned} U'(t) &= F(t)U(t) \\ U(0) &= C_0 \end{aligned} .$$

Suponha que $F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j t^j$, em que $F_j \geq 0$, e $\sum_{j=0}^{\infty} |F_j| r^j < \infty$, para um certo $0 < r \leq R$. Suponha que a Equação (0.3) tenha uma solução real analítica numa vizinhança do zero da forma $U(t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j$. Mostre por indução que, se $|c_0| \leq C_0$ e $|f_j| \leq F_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, então $|c_j| \leq C_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

(1 ponto) c) Mostre que existe uma constante $C > 0$ e uma função $F(t) = \frac{CR}{R-t}$ tal que $f \ll F$, ou seja, $|f_j| \leq F_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

(1 ponto) d) Ache uma solução do tipo $U(t) = \beta (R - t)^\alpha$ (essas funções são reais-analíticas!) da equação abaixo:

$$\begin{aligned} U'(t) &= \frac{CR}{R-t} U(t) \\ U(0) &= |c_0| \end{aligned}$$

e use os resultados dos itens anteriores para provar o seguinte resultado: Existe uma função u real-analítica numa vizinhança de zero que resolve a Equação (0.2).

FORMULÁRIO. (NEM TUDO É NECESSÁRIO)

Algumas soluções de EDO: Se $f' = gf \implies f(x) = Ce^{\int_0^x g(s)ds}$.

Definição 4. (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $F : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Logo

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_U \nabla \cdot F(x) dx,$$

em que $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de U .

Proposição 5. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e f e g duas funções em $C^1(\overline{U})$. Logo

$$(0.4) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx = - \int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x),$$

em que $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal a ∂U no ponto x e que aponta para fora de U .

Definição 6. Uma curva integral do campo $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $V = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ é um caminho $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação diferencial $x'(t) = V(x(t))$. Assim, se $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, então

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Proposição 7. Seja $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva integral com imagem no aberto $W \subset U$ e $u : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x))$, $x \in W$. Logo $v = u \circ x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação $v'(t) = f(x(t), v(t))$. Em particular, se $f = 0$, então $u \circ x$ é constante.

Teorema 8. Considere a equação abaixo:

$$(0.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Suponha que g e h estejam em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, temos

i) $n = 1$ Fórmula de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

ii) $n = 2$ Fórmula de Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \oint_{B(x, t)} \left(\frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} \right) dy.$$

iii) $n = 3$ Fórmula de Kirchoff:

$$u(x, t) = \oint_{\partial B(x, t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)) dS(y).$$

Teorema 9. (Cauchy-Kowaleski) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\Gamma \subset U$ uma superfície real-analítica. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) &= f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)), & x \in U \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) &= g_j(x), & x \in \Gamma \quad j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

Vamos supor que:

i) $a_\alpha : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma função real analítica.

ii) $f : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função real analítica.

iii) $g_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função real analítica, para todo $j \in \{0, \dots, m-1\}$.

Assim, se $x_0 \in U$ for tal que $\det \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial^1 u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$, então existe um aberto $V \subset U$ que contém x_0 e uma função real analítica $u : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ que é solução do problema em V .