

**SEGUNDA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)**

A prova é individual. A soma de pontos é 10,5 (tem 0,5 extra). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

**Boa Prova!**

**Exercício 1.** (1,25 ponto) a) Resolva a seguinte equação:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -xu(x, y), \quad u(x, x) = x.$$

(1,25 ponto) b) Resolva a seguinte equação:

$$u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 1, \quad u(x, 0) = 1.$$

(1,0 ponto) c) Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução da equação:

$$y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - 4x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Ache curvas em  $\mathbb{R}^2$  sobre as quais a solução  $u$  da equação acima é constante.

**Exercício 2.** (1,2 ponto) a) Resolva a equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - 3 \frac{\partial u}{\partial t \partial x}(x, t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= x, & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} .$$

Dica: Procure soluções com a forma abaixo, em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais distintas:

$$u(x, t) = f(x + \alpha t) + g(x + \beta t).$$

(1,2 ponto) b) Considere o problema abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} .$$

Suponha que  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  seja igual a 0 fora de  $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$  e  $h(x) > 0$  para  $x \in B(0, 1)$ . Seja  $x_0 \notin B(0, 1)$ . Ache os valores de  $t \geq 0$  para os quais  $u(x_0, t) \neq 0$  nos casos em que  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ . Qual a diferença entre as dimensões 1 e 2 e a dimensão 3? (Dica: Use as fórmulas de d'Alembert, Poisson e Kirchoff)

(1,1 ponto) c) Sejam dadas funções  $a_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  e  $g$  funções em  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Suponha também que exista  $a_0 > 0$  tal que  $\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Considere a equação

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} .$$

Suponha que  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma solução de suporte compacto, ou seja, existe  $R > 0$  tal que  $u(x, t) = 0$  para todo  $|x| \geq R$ . Mostre que a função  $E : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  definida abaixo é não-crescente ( $E'(t) \leq 0$ ):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right] dx, \quad t \in [0, T].$$

Conclua que existe no máximo uma solução de suporte compacto da Equação (0.1).

**Exercício 3.** Considere a equação abaixo:

$$(0.2) \quad \begin{cases} I) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + a \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \\ II) & u(x_1, 0) = f(x_1) \\ III) & \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = g(x_1) \end{cases}$$

(1,25 ponto) a) Seja  $a = 1$  e defina  $U_0 = u$ ,  $U_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$  e  $U_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$ . Escreva a equação acima da forma equivalente

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(U_0, U_1, U_2) = \left( F_1 \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right), F_1 \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right), F_1 \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, j \neq 2 \right) \right).$$

Encontre as funções  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ . Qual deve ser a condição inicial  $(U_0(x_1, 0), U_1(x_1, 0), U_2(x_1, 0))$ ?

(1,25 ponto) b) Seja  $a = 1$ ,  $f$  e  $g$  duas funções reais analíticas numa vizinhança de zero. É verdade que sempre existe uma solução real-analítica  $u$  numa vizinhança da origem? Se sim, escreva  $u(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$  e ache uma relação entre os coeficientes de  $c_{j(k+2)}$  em função de  $c_{j(k+1)}$  e  $c_{(j+2)k}$ . Se  $f(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_1^j$ ,  $f_j \in \mathbb{R}$ , e  $g(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_1^j$ ,  $g_j \in \mathbb{R}$ , determine os coeficientes  $c_{j0}$  e  $c_{j1}$ , para  $j \in \mathbb{N}_0$ , em função de  $f_j$  e  $g_j$ .

(1,0 ponto) c) Seja  $a = 0$ . É verdade que para todas as funções reais-analíticas  $f$  e  $g$  sempre existe uma solução real analítica  $u$  numa vizinhança de zero da Equação (0.2)? Se sim, determine os coeficientes da solução  $u(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$ ,  $c_{jk} \in \mathbb{R}$ , em termos de  $f_j$  e  $g_j$ . Se não for, mostre porque isso nem sempre é possível. (Dica: Seja  $f(x_1) = g(x_1) = 1$  para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ . O que a equação I) nos diz quando  $x_2 = 0$ ?)

FORMULÁRIO. (NEM TUDO É NECESSÁRIO)

Algumas soluções de EDO: Se  $f' = gf \implies f(x) = Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ .

**Definição 4.** (Teorema da Divergência) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ . Logo

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_U \nabla \cdot F(x) dx,$$

em que  $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o vetor normal unitário que aponta para fora de  $U$ .

**Proposição 5.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $f$  e  $g$  duas funções em  $C^1(\bar{U})$ . Logo

$$(0.3) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = - \int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x),$$

em que  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  é a normal a  $\partial U$  no ponto  $x$  e que aponta para fora de  $U$ .

**Definição 6.** Uma curva integral do campo  $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $V = (a_1(x), \dots, a_n(x))$  é um caminho  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfaz a equação diferencial  $\mathbf{x}'(t) = V(\mathbf{x}(t))$ . Assim, se  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , então

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

**Proposição 7.** Seja  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva integral com imagem no aberto  $W \subset U$  e  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de  $\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x))$ ,  $x \in W$ . Logo  $v = u \circ \mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução da equação  $v'(t) = f(\mathbf{x}(t), v(t))$ . Em particular, se  $f = 0$ , então  $u \circ \mathbf{x}$  é constante.

**Teorema 8.** Considere a equação abaixo:

$$(0.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Suponha que  $g$  e  $h$  estejam em  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Logo, temos

i)  $n = 1$  Fórmula de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-t) + g(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

ii)  $n = 2$  Fórmula de Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \left( \frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right) dy.$$

iii)  $n = 3$  Fórmula de Kirchoff:

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)) dS(y).$$

**Teorema 9.** (Cauchy-Kowaleski) Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $\Gamma \subset U$  uma superfície real-analítica. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)) \partial^\alpha u(x) &= f(x, \partial u(x), \dots, \partial^{m-1} u(x)), & x \in U \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(x) &= g_j(x), & x \in \Gamma \quad j \in \{0, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

Vamos supor que:

i)  $a_\alpha : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  é uma função real analítica.

ii)  $f : U \times \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2N} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^mN} \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica.

iii)  $g_j : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função real analítica, para todo  $j \in \{0, \dots, m-1\}$ .

Assim, se  $x_0 \in U$  for tal que  $\det \left( \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0, \partial^1 u(x_0), \dots, \partial^{m-1} u(x_0)) \nu^\alpha(x_0) \right) \neq 0$ , então existe um aberto  $V \subset U$  que contém  $x_0$  e uma função real analítica  $u : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  que é solução do problema em  $V$ .