Tensor de Levi-Civita

Dado um espaço vetorial de dimensão n, define-se o tensor de Levi-Civita como sendo um mapeamento multilinear $\epsilon: \mathbb{V}\times\mathbb{V}\times\ldots\times\mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (ou seja, um tensor de posto $(0,n)$, representado por $\epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ na notação de índices abstratos) que é completamente antissimétrico; ou seja, o resultado de ϵ atuando numa n-upla de vetores troca de sinal se quaisquer dois elementos dessa n-upla trocarem de posição entre eles:

os mesmos

$$\epsilon(\ldots, u, \ldots, v, \ldots) = -\epsilon(\ldots, v, \ldots, u, \ldots)$$

os mesmos

os mesmos

Em notação de índices abstratos:

$$\epsilon_{\ldots a_i \ldots a_j \ldots} u^{a_i} v^{a_j} = -\epsilon_{\ldots a_i \ldots a_j \ldots} u^{a_j} v^{a_i} = -\epsilon_{\ldots a_j \ldots a_i \ldots} u^{a_i} v^{a_j}, \ \forall\, u^a, v^a \iff$$

$$\iff \quad \epsilon_{\ldots a_i \ldots a_j \ldots} = -\epsilon_{\ldots a_j \ldots a_i \ldots}$$

Exercício: Mostre que dois tensores de posto $(0,n)$ totalmente antissimétricos (com n sendo também a dimensão de $\mathbb{V}$) podem diferir apenas por uma constante multiplicativa.

O exercício acima mostra que o conjunto dos tensores antissimétricos de posto $(0,n)$ (com n sendo a dimensão de $\mathbb{V}$) forma um espaço vetorial unidimensional, o que significa que embora sejam objetos com n^n componentes, todas essas componentes são determinadas por um único parâmetro não nulo (por exemplo, uma de suas componentes não nulas).

Exercício: Nos casos em que $n=3$ e $n=4$, calcule todas as componentes dos tensores de Levi-Civita correspondentes, em termos de ϵ_{123} (no caso $n=3$) e ϵ_{0123} (no caso $n=4$).

Exercício: Sejam $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ três vetores (segmentos orientados) no espaço euclidiano $\mathbb{E}^3$.

a) Mostre que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ (como arestas do paralelepípedo) é dado pelo módulo do "produto misto":

$$\text{Vol} = |\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})| = |\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})| = |\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})|$$

b) Mostre que (na notação de índices abstratos) o produto misto é dado por

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \epsilon_{abc} A^a B^b C^c,$$ onde ϵ_{abc} é um tensor antissimétrico que numa base ortonormal de mão direita (ou seja, $\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_3$) tem componente $\epsilon_{123} = +1$.

(Sugestão: mostre essa igualdade usando uma base ortonormal de mão direita e, em seguida, argumente porque nenhum dos dois deve depender da escolha de base — logo, a igualdade seria válida sempre).

O resultado do exercício acima na verdade fornece um critério geométrico para selecionar, d'entre os tensores antissimétricos de posto $(0,n)$, dois privilegiados: aqueles que, dado um paralelepípedo n dimensional determinado pelos vetores $\ell_1^a, \ell_2^a, \ell_3^a, \dots, \ell_n^a$ (como suas arestas), atribui o volume n-dimensional desse paralelepípedo como sendo

$$\text{Volume} = |\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} \ell_1^{a_1} \ell_2^{a_2} \dots \ell_n^{a_n}|$$

Note que $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ é determinado a menos de um sinal — daí o fato de esse critério selecionar 2 possíveis tensores. O tensor antissimétrico $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ que satisfaz essa propriedade (ou, invertendo o raciocínio, que define uma medida de volume em V, mesmo nos casos em que não haja uma métrica definida) é o chamado tensor de Levi-Civita.

Obs: A quantidade $\epsilon_{a_1 \dots a_n} \ell_1^{a_1} \dots \ell_n^{a_n}$ dá-se o nome de "volume orientado", pois pode ser positivo ou negativo. E uma n-upla de vetores L.I. $(v_1^a, v_2^a, \dots, v_n^a)$ é dita ter "orientação positiva" (ou ser de mão direita, no caso $n=3$) se $\epsilon_{a_1 \dots a_n} v_1^{a_1} \dots v_n^{a_n} > 0$.

No caso em que há um tensor métrico definido, é natural esperar que a noção de volume associada a $\epsilon_{ab\dots}$ seja consistente com a noção de distâncias introduzida pela métrica (como no exemplo do espaço euclidiano dado anteriormente). Isso impõe que numa base ortonormal (ou tetrada), as componentes não nulas de $\epsilon_{ab\dots}$ sejam $+1$ ou -1. Em particular, uma vez decidido qual ordenamento dos vetores da base será considerado ter orientação positiva, nessa base $\epsilon_{012\dots(n-1)} = +1$.

Obs: "Levantando" os índices de $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ usando a métrica inversa g^{ab}, $\epsilon^{a_1 a_2 \dots} = g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \dots \epsilon_{b_1 b_2 \dots}$, note que

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_n b_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n}$$

Se escolhermos uma base ortonormal (ou tetrada) para expressar a equação acima, não é difícil ver que o resultado da conta será $n!$ (n fatorial) p/ métricas positivo-definidas e $-n!$ para métricas com assinatura Lorentziana. Mas se $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ é um tensor legítimo, então a expressão acima, sendo um escalar, é independente de base. Por outro lado, abrindo o lado direito expresso numa base arbitrária, tem-se

$$g^{a_1 b_1} \dots g^{a_n b_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n} = (\epsilon_{012\dots})^2 [n! \det(g^{\mu\nu})] = \frac{n! (\epsilon_{012\dots})^2}{\det(g_{\mu\nu})},$$

onde $\det(g_{\mu\nu})$ é o determinante da matriz das componentes da métrica. Dessa expressão e da imposição que o resultado acima não dependa de base, temos que

$$\boxed{\epsilon_{012\dots} = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}}.$$

Ou seja, numa base arbitrária, as componentes do tensor de Levi-Civita não são, necessariamente, ± 1.

- Identidades

Como vimos anteriormente, o espaço de tensores antissimétricos de posto $(0,n)$ é unidimensional, de modo que quaisquer dois tensores destes são relacionados por uma proporcionalidade. O mesmo vale para tensores antissimétricos de posto $(n,0)$. Logo, podemos expressar o tensor $\epsilon^{a_1\dots a_n}\epsilon_{b_1\dots b_n}$ como um múltiplo de antissimetrizações apropriadas de $\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\cdots\delta^{a_n}_{b_n}$. Por exemplo, no caso $n=3$, temos:

$$\epsilon^{a_1a_2a_3}\epsilon_{b_1b_2b_3} = K\left(\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3} + \delta^{a_3}_{b_1}\delta^{a_1}_{b_2}\delta^{a_2}_{b_3} + \delta^{a_2}_{b_1}\delta^{a_3}_{b_2}\delta^{a_1}_{b_3} - \delta^{a_2}_{b_1}\delta^{a_1}_{b_2}\delta^{a_3}_{b_3} + \right.$$
$$\left. - \delta^{a_3}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}\delta^{a_1}_{b_3} - \delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_3}_{b_2}\delta^{a_2}_{b_3}\right).$$

O valor da constante K é, justamente, determinado usando que a contração $\epsilon^{a_1\dots a_n}\epsilon_{a_1\dots a_n} = n!$

Exercício: Obtenha o valor de K acima. (Resposta: $K=1$)

Exercício: Refaça a manipulação acima p/ $n=4$ e métrica c/ assinatura Lorentziana

Exercício: No caso $n=3$ anterior, mostre que

$$\epsilon^{abe}\epsilon_{cde} = \left(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c\right)$$

$$\epsilon^{acd}\epsilon_{bcd} = 2\,\delta^a_b$$

Exercício: No caso $n=4$ e assinatura Lorentziana, mostre que:

$$\epsilon^{abch}\epsilon_{defh} = -\left(\delta^a_d\delta^b_e\delta^c_f + \delta^b_d\delta^c_e\delta^a_f + \delta^c_d\delta^a_e\delta^b_f - \delta^b_d\delta^a_e\delta^c_f - \delta^a_d\delta^c_e\delta^b_f - \delta^c_d\delta^b_e\delta^a_f\right)$$

$$\epsilon^{abef}\epsilon_{cdef} = -2\left(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c\right)$$

$$\epsilon^{acde}\epsilon_{bcde} = -6\,\delta^a_b$$