2020-2, "FISMAT-AV", AULA 46

OBJETIVO: APRESENTAR CASOS BÁSICOS DE INTEGRAIS DE FUNÇÕES PLURÍVOCAS.

5.5 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES PLURÍVOCAS

VAMOS CONSIDERAR INTEGRAIS DO TIPO

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

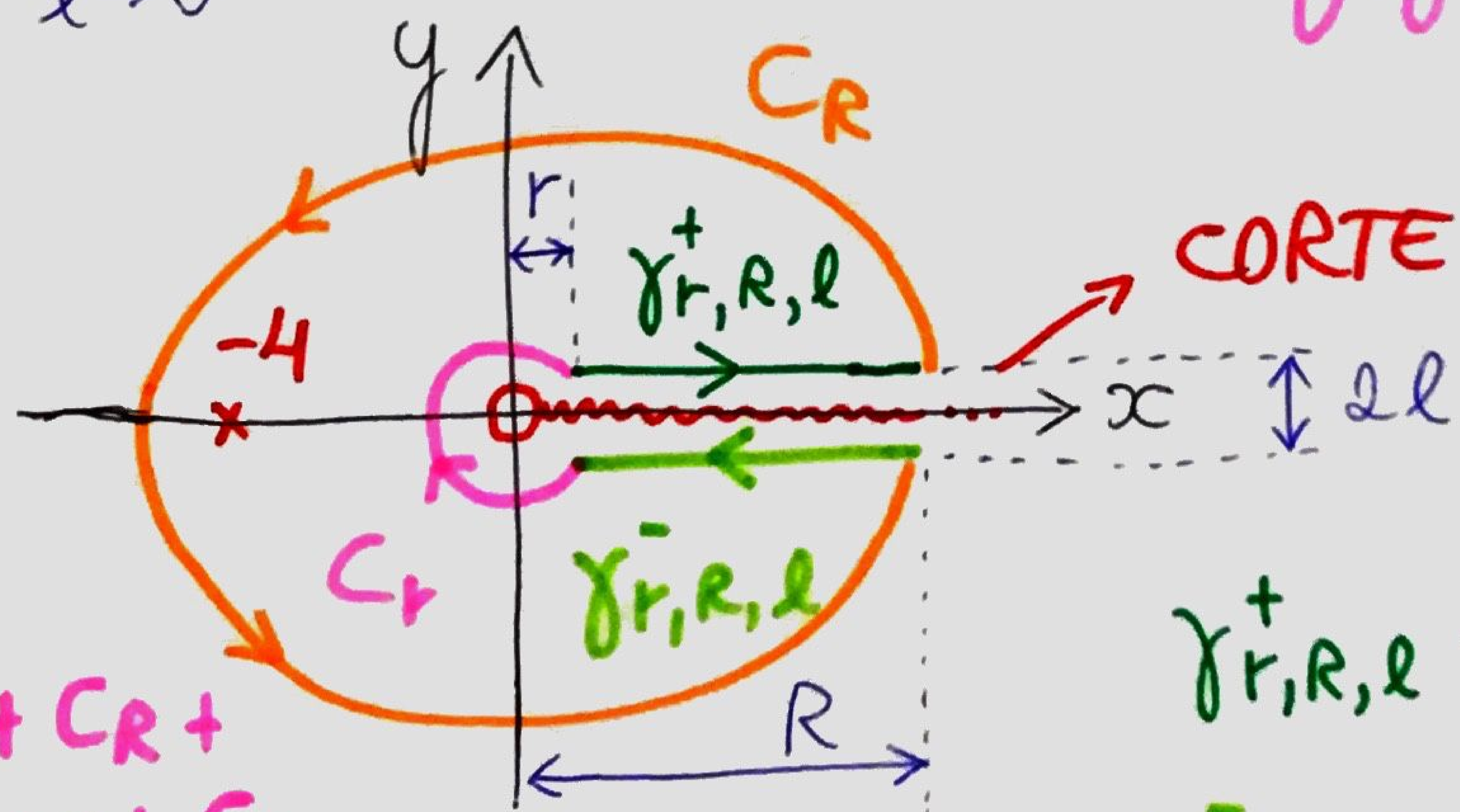
EM QUE f É UMA FUNÇÃO PLURÍVOCA COM PONTO DE <u>RAMIFICAÇÃO</u> <u>NA</u> <u>ORIGEM</u>. NESSA SITUAÇÃO, É MUITO CONVENIENTE ESCOLHER UM <u>CORTE</u> <u>NA</u> <u>RETA</u> <u>REAL</u> <u>POSITIVA</u>, QUE SERÁ UM TRECHO DE UM CONTORNO FECHADO AO LONGO DO QUAL REALIZAREMOS UMA INTEGRAÇÃO COMPLEXA.

(i) $I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\,dx$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0^+}} \int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0^+ \\ \ell\to 0^+}} \int_{\gamma^+_{r,R,\ell}} \frac{1}{\sqrt{z}\,(z+4)}\,dz$$

$\equiv f(z)$



$C = \gamma^+ + C_R +$
$+ \gamma^- + C_r$

$\gamma^+_{r,R,\ell} \to \gamma^+$

$\gamma^-_{r,R,\ell} \to \gamma^-$

$\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0^+ \\ \ell\to 0^+}} \longrightarrow \lim$

$$\lim \oint_C f(z)\,dz =$$

$$= \lim \left[\int_{\gamma^+} + \int_{C_R} + \int_{\gamma^-} + \int_{C_r} \right] f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \,.\, \mathrm{RES}[f(z); -4] \quad (*)$$

VEREMOS QUE, NO LIMITE, ANULAM-SE AS INTEGRAIS EM C_R E C_r, ENQUANTO AQUELA EM γ^- TAMBÉM VALE I, COMO A INTEGRAL "ORIGINAL" EM γ^+.

$$f(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\rho^{1/2} e^{i\theta/2} (\rho e^{i\theta}+4)},$$

MAS

$$f(z)\,dz \to f(\rho e^{i\theta}) . [i\rho e^{i\theta}] d\theta,$$

DE MODO QUE

$$f(z(\theta)) . z'(\theta) \xrightarrow[\rho \to \infty \ (R \to +\infty)]{\rho \to 0^+ \ (r \to 0^+)} 0 .$$

SOBRE γ^-,

$$\lim \int_{\gamma^-} f(z)\,dz = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x+4}\,dx = I,$$

POIS γ^- TENDE AO CORTE PELO 4º QUADRANTE, E $\sqrt{z} = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z} =$

$$= e^{\frac{1}{2}(\log|z| + i\theta)},$$

COM $\boxed{0 < \theta < 2\pi}$ PELO CORTE QUE NOS FOI CONVENIENTE. NO LIMITE PELO 4º QUADRANTE, $\theta \to 2\pi^-$ E $x > 0$

$$\sqrt{z} \to e^{\frac{1}{2}(\log x + i2\pi)} = \sqrt{x} \, . \, e^{i\pi}$$
$$= -\sqrt{x} \, .$$

PORTANTO, DA EQ. (*),

$$2I = 2\pi i \, . \, \mathrm{RES}[f(z); -4] \Rightarrow$$

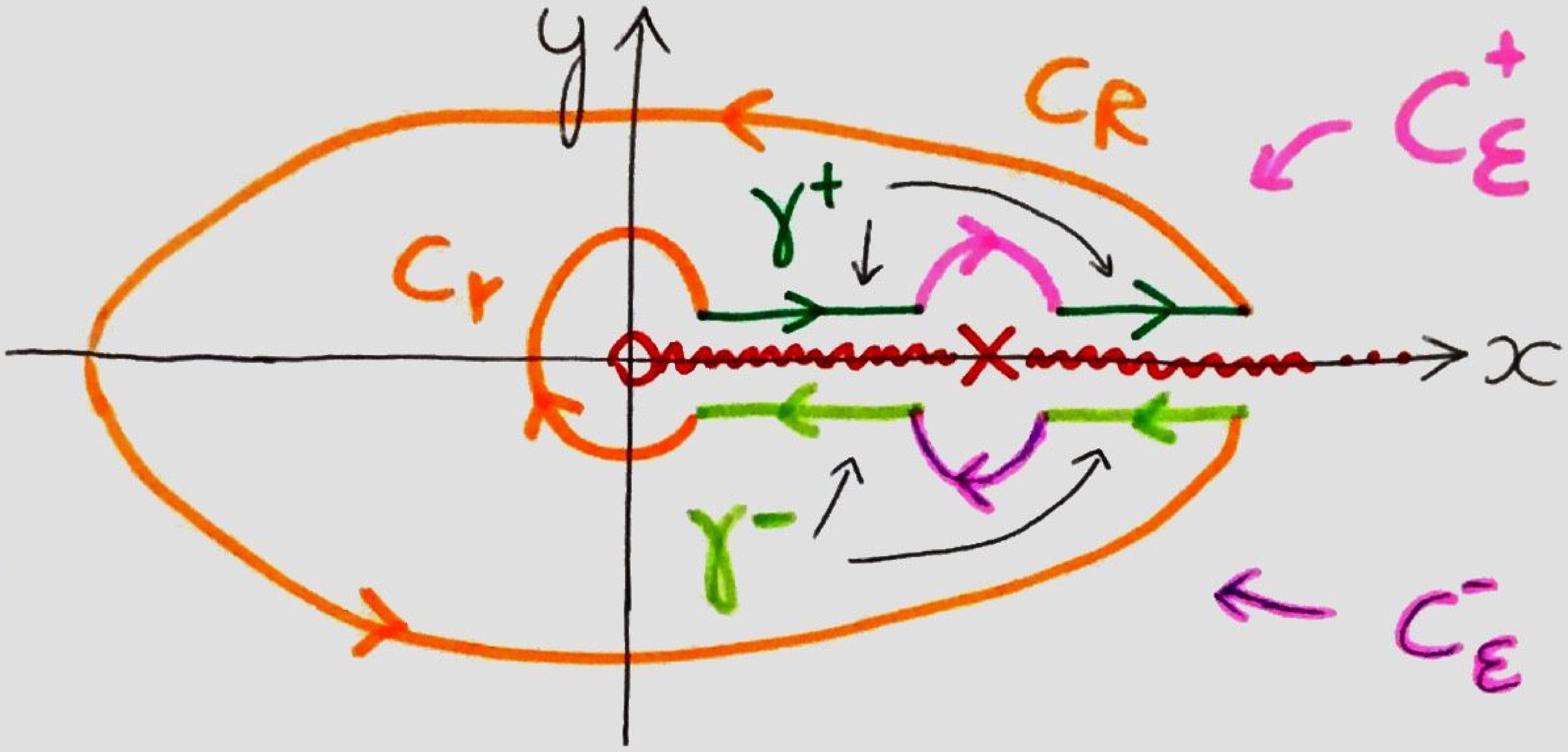
$$\Rightarrow I = \pi i \frac{1}{\sqrt{-4}} \quad \therefore \quad \boxed{I = \frac{\pi}{2}}$$

(ii) UM EXEMPLO BEM MAIS DELICADO É

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^a(x-4)} dx \quad , \quad 0 < a < 1,$$

POIS $z = +4$ É UM PÓLO SIMPLES DENTRO DA REGIÃO DE INTEGRAÇÃO.

EM COMPARAÇÃO COM O EXEMPLO (i), HÁ UM LIMITE ADICIONAL, NO SENTIDO DE VALOR PRINCIPAL, $\varepsilon \to 0^+$.



AGORA, OS TRECHOS EM ROSA NÃO SÃO NULOS, E TÊM UMA DIFERENÇA DE FASE ENTRE SI ANÁLOGA ÀQUELA ENTRE γ^+ E γ^-. COMO

$$z^a = e^{a \log z} = e^{a(\log|z| + i\theta)} \to$$

$$\xrightarrow{\theta \to 2\pi^-} z^a \cdot e^{2\pi i a},$$

$$0 = I - e^{-2\pi i a} \cdot I - \pi i \frac{1}{4a} - \pi i \frac{1}{4a \cdot e^{2\pi i a}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi i}{4a} \cdot \frac{1 + e^{-2\pi i a}}{1 - e^{-2\pi i a}} \therefore \boxed{I = \frac{\pi}{4a} \cot \pi a}$$