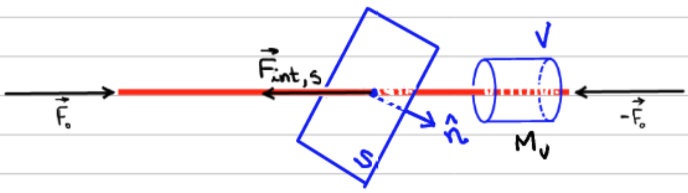
■ Tensor energia-momentum-estresse de uma haste unidimensional tensionada

No referencial inercial de repouso da haste, consideremos a seguinte configuração:


Para determinar o tensor energia-momentum-estresse $T_{ab}$ dessa haste, basta aplicarmos a definição nesse referencial em particular:

$$M_V c^2 =: \int_V d^3x\, T_{00}(x) \quad , \forall V \subseteq \mathbb{E}^3$$




$$P_V^j c =: \int_V d^3x\, T^{0j}(x) , \forall V \subseteq \mathbb{E}^3$$

$$F^j_{int,S} =: -\int_S dS\, \hat{n}_k T^{jk}(x) \quad , \forall \text{ superfície } S \subseteq \mathbb{E}^3$$

Sendo $M_0$ a massa de repouso da haste (e sendo ela homogênea com comprimento $L_0$), temos que $M_V$ é proporcional à porção de haste contida em $V$:

$$M_V = \left(\frac{\ell_V}{L_0}\right) M_0$$ , onde $\ell_V$ é o comprimento da haste contida em $V$.

Adotando coordenadas de modo que a haste esteja localizada em $y=z=0$ e $0<x<L_0$. Assim, podemos escrever $\ell_V$ como:

$$\ell_V = \int_{V\cap[0,L]} dx = \int_{V_x} dx\, [\Theta(x) - \Theta(x-L_0)] = \int_V d^3x\, [\Theta(x) - \Theta(x-L_0)]\, \delta(y)\delta(z) ,$$

onde $V_x := V \cap \{\text{eixo } x\}$, $\Theta(x)$ é a função degrau de Heaviside e $\delta(x)$ é a distribuição $\delta$-de-Dirac. Substituindo essas expressões na definição, tem-se:

$$M_V c^2 = \frac{\ell_V}{L_0} M_0 c^2 = \frac{M_0 c^2}{L_0} \int_V d^3x\, [\Theta(x) - \Theta(x-L_0)]\, \delta(y)\delta(z) =: \int_V d^3x\, T_{00}(x) \quad , \forall V \subseteq \mathbb{E}^3$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{T_{00}(x) = \frac{M_0 c^2}{L_0} [\Theta(x) - \Theta(x-L_0)]\, \delta(y)\delta(z)}$$

Quanto ao momentum contido num volume $V$ qualquer, no referencial de repouso da haste, a simetria da configuração leva inevitavelmente a

$$\vec{P}_V = \vec{0} \quad , \forall V \subseteq \mathbb{E}^3 \Longleftrightarrow \boxed{T^{0j}(x) = 0 \quad , j = x,y,z}$$

Por fim, como a haste está parada no referencial inercial em questão, temos, por condição de equilíbrio,

$$\vec{F}_{int,S} = \begin{cases} -\vec{F}_0 , & \text{se } \hat{n}_x > 0 \text{ e } [0,L]\cap S \neq \emptyset \\ \vec{F}_0 , & \text{se } \hat{n}_x < 0 \text{ e } [0,L]\cap S \neq \emptyset \\ \vec{0} , & \text{se } [0,L]\cap S = \emptyset \end{cases} .$$

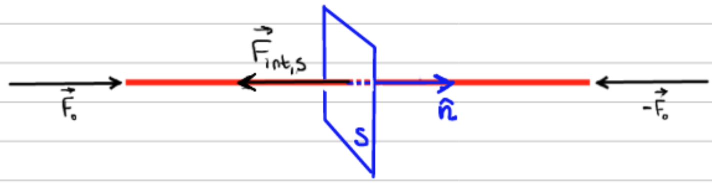
Logo,

$$F^{y}_{int,S} = F^{z}_{int,S} = 0 \iff T^{yk}\hat{n}_k = 0 = T^{zk}\hat{n}_k \,,\ \forall\, \hat{n} \iff \boxed{T^{yk} = T^{zk} = 0 \,,\ k = x,y,z}$$

Até aqui, já determinamos quase todas as componentes de $T^{\mu\nu}$, sendo a maioria delas nulas:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (M_0c^2/L_0)\,[\Theta(x)-\Theta(x-L_0)]\,\delta(y)\delta(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar a componente que falta, $T_{xx}$, podemos usar uma superfície $S$ perpendicular à haste:




$$F^{x}_{int,S} = \begin{Bmatrix} -F_0 & ,\ \text{se } S\cap[0,L] \neq \emptyset \\ 0 & ,\ \text{se } S\cap[0,L] = \emptyset \end{Bmatrix} = -F_0 \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z)[\Theta(x)-\Theta(x-L_0)] = -\int dy \int dz\, \overset{=1}{n_x}\, T^{xx}(x) \iff$$

$$\iff \boxed{T^{xx}(x) = T_{xx}(x) = F_0\,[\Theta(x)-\Theta(x-L_0)]\,\delta(y)\delta(z)}$$

Finalmente, então, temos as componentes do tensor energia-momentum-estresse $T_{ab}$ da <u>haste tensionada</u>, no sistema de coordenadas cartesiano inercial no qual a haste encontra-se <u>em repouso</u> e <u>orientada ao longo do eixo $x$</u>:

$$\boxed{T_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} M_0c^2/L_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\Theta(x)-\Theta(x-L_0)]\,\delta(y)\delta(z)}$$

Como "check" de consistência, vamos calcular as componentes de $\nabla_a T^{ab}$ no sistema de coordenadas acima (no qual $\nabla_a \equiv \partial_a$). Como $M_0$, $L_0$ e $F_0$ são parâmetros constantes, basta calcularmos, primeiro:

$$\partial_\mu \{[\Theta(x)-\Theta(x-L_0)]\,\delta(y)\delta(z)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ [\delta(x)-\delta(x-L_0)]\,\delta(y)\delta(z) \\ [\Theta(x)-\Theta(x-L_0)]\,\delta'(y)\delta(z) \\ [\Theta(x)-\Theta(x-L_0)]\,\delta(y)\delta'(z) \end{pmatrix},$$

onde usamos que $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$ e usamos o símbolo $\delta'$ para a derivada de $\delta$. Logo:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0\,\delta(x)\delta(y)\delta(z) - F_0\,\delta(x-L_0)\delta(y)\delta(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ o que mostra que, de fato, a haste está sujeita a forças <u>externas</u> concentradas em suas extremidades.