

Tensores de tensão e conjugado energético

SEM5936 - Fundamentos da mecânica do contínuo aplicada a sólidos

Dezembro 2020

1 Introdução

Como foi visto para deformações, também há diversas definições de forças internas que agem em um sólido. Essas forças internas formam um tensor de segunda ordem que deve ser simétrico. Portanto as forças internas sempre podem ser quantificadas por seis valores e todas as definições diversas devem ser equivalentes.

As forças podem ser aplicadas em um sólido de duas maneiras: Na primeira as forças podem ser aplicadas na superfície (exemplos: pressão, contato entre dois corpos). Já na segunda são as chamadas forças de corpo, que agem no interior do corpo (Exemplos: forças gravitacionais, forças eletromagnéticas) [1].

O "*vetor de tração de superfície*" representa uma força agindo sobre um elemento de área infinitesimal de um corpo. Formalmente, defini-se o elemento de área $d\Gamma$ onde age uma força dP , então:

$$\mathbf{T} = \lim_{d\Gamma \rightarrow 0} \frac{dP}{d\Gamma} \quad (1)$$

A força externa resultante pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \int_{\Gamma} T d\Gamma \quad (2)$$

A tensão verdadeira pode ser entendida como "*vetor de tração de superfície*" agindo no corpo na configuração corrente (deformada).

O "*vetor de tração de superfície*" pode ser decomposto em uma componente agindo paralela ao vetor de área, e outra componente agindo tangencial a esse vetor, conforme mostra a figura 1.

O *vetor de forças internas* denota uma força agindo no interior do corpo por unidade de volume $d\Omega$. Pode ser definida como:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{dP}{d\Omega} \quad (3)$$

A força interna resultante pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega \quad (4)$$

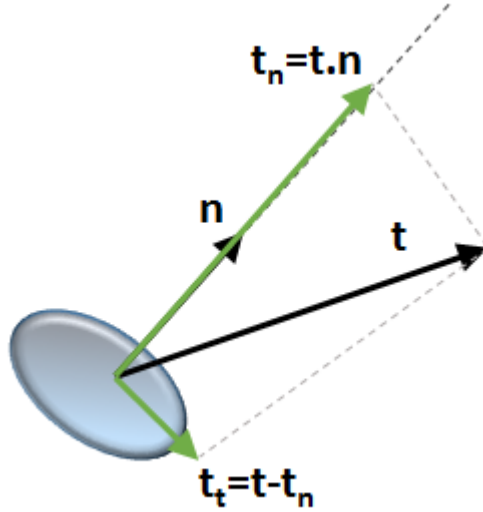


Figure 1: "vetor de tração de superfície" e suas componente normais e tangenciais [3]

Define-se também o *vetor de tração interno*, $t(n)$, que atua em um plano de corte interno, de área $d\Gamma$ do corpo e é função desse plano.

$$\mathbf{t} = \lim_{d\Gamma \rightarrow 0} \frac{dP^n}{d\Gamma} \quad (5)$$

Considerando as forças externas e internas, a resultante pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho b d\Omega + \int_{\Gamma} t d\Gamma \quad (6)$$

Sabe-se que se realizarmos um corte em um corpo, submetido a carregamentos internos e externos, a superfície desse corte, em um dos lados estará submetida a *vetores de tração*, assim como na outra superfície, pela terceira lei de Newton, também estará submetida a *vetores de tração* com mesma intensidade porém em sentido oposto (Figura 2).

Em um caso mais geral, considere um *vetor de tração* em uma superfície $d\Gamma$ com normal n , conforme indicado na figura 3. Nessa figura, as componentes do *vetor de tração* em relação a base ortonormal e_i é dado pelas componentes t_{ei} .

Pode-se então escrever o *vetor de tração* em relação às suas componentes:

$$\mathbf{t} = t_{-e1}n_1 + t_{-e2}n_2 + t_{-e3}n_3 \quad (7)$$

Portanto os *vetores de tração* em diferentes planos de corte e que passam no mesmo ponto são relacionados de modo a atender a segunda lei de Newton. A figura 4 apresenta a situação descrita.

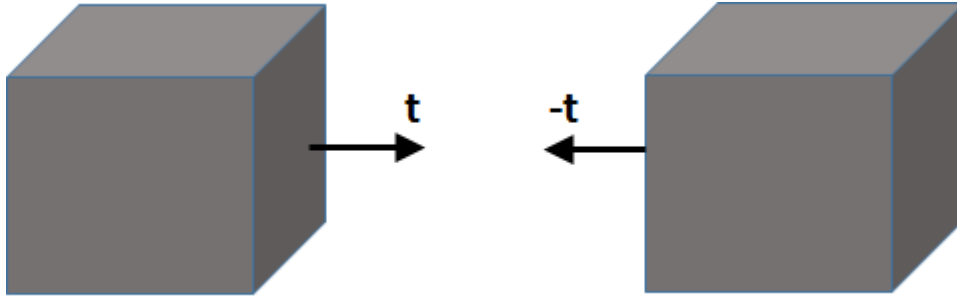


Figure 2: Segunda Lei de Newton

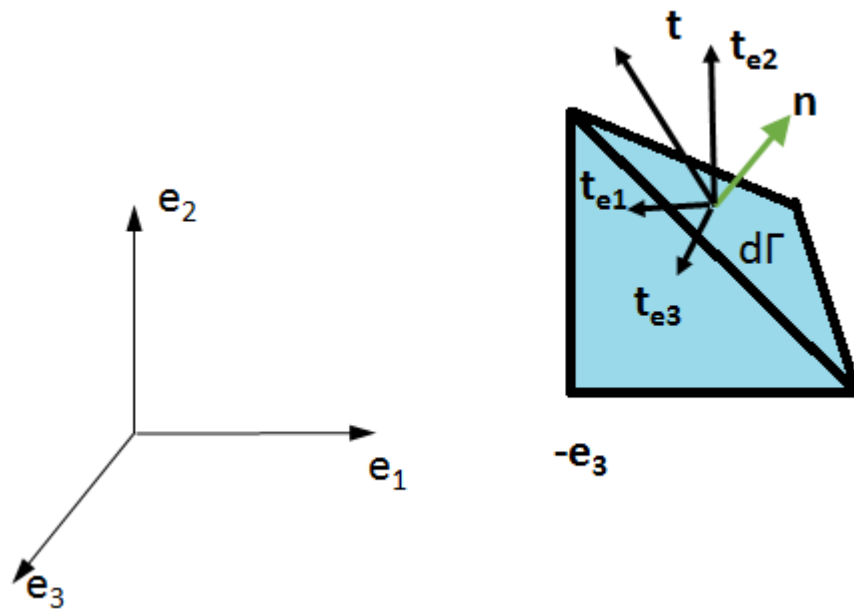


Figure 3: *vetores de tração*

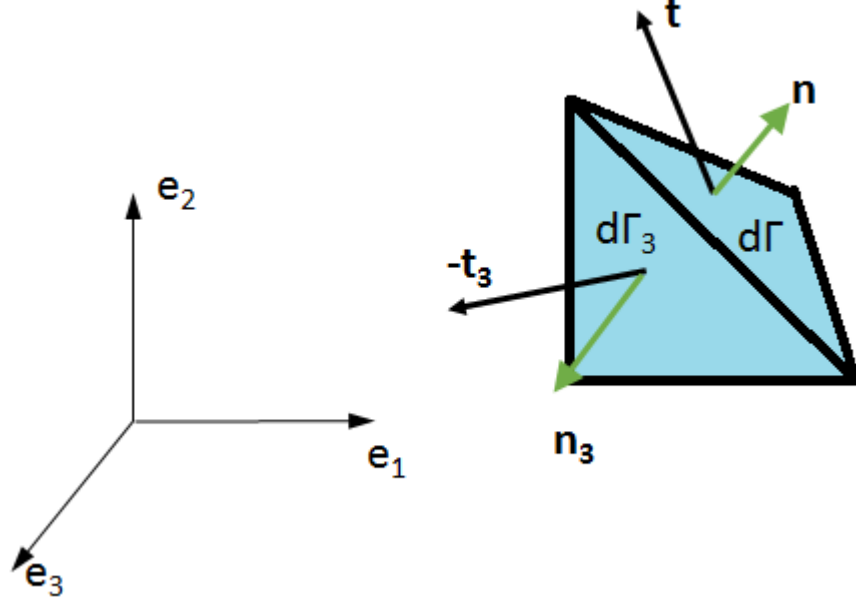


Figure 4: *vetores de tração*

Ao realizarmos a somatória das forças que agem nesse tetrahedro infinitesimal, temos a seguinte relação:

$$t d\Gamma - t_1 d\Gamma_1 - t_2 d\Gamma_2 - t_3 d\Gamma_3 + \rho b d\Omega = \rho d\Omega a \quad (8)$$

Onde b são as forças de volume ($d\Omega$) e a é a aceleração. Recordando que $d\Gamma_i/d\Gamma = n_i$, e dividindo a equação anterior por $d\Gamma$, chega-se na equação.

$$t - t_1 n_1 - t_2 n_2 - t_3 n_3 + \rho b \frac{d\Omega}{d\Gamma} = \rho \frac{d\Omega}{d\Gamma} a \quad (9)$$

E pelo fato que $d\Omega$ vai mais rápido para zero que $d\Gamma$ pois o volume é uma relação cúbica e a área é uma relação quadrática, portanto $d\Omega/d\Gamma = 0$, tem-se a seguinte relação:

$$t - t_1 n_1 - t_2 n_2 - t_3 n_3 = 0 \quad (10)$$

Portanto os *vetores de tração* que agem em planos com normais e_i caracterizam completamente as forças atuantes em um ponto. Segue que dado um *vetores de tração* pode-se obter os *vetores de tração* que agem em qualquer plano de corte que passa pelo ponto em questão.

Agora considere um corpo que se deforma ao ser submetido a um esforço (interno ou externo). Considere novamente o sistema cartesiano ortonormal

e_i . Considere que as componente do vetor de tração agindo em um plano com normais e_i seja dado por $T_i(e_1), T_i(e_2), T_i(e_3)$.

Definindo os componentes do tensor de tensão de Cauchy como sendo $\sigma_{ij} = T_j(e_i)$. Portanto o *vetor de tração* agindo em qualquer plano é dado pela fórmula de Cauchy $T_i = \sigma_{ij}n_j$.

O tensor de tensão de Cauchy caracteriza completamente as forças agindo internamente em um corpo deformado (formulação Euleriana). O significado físico do tensor de Cauchy é apresentado na figura 5. Note que as tensões de Cauchy representam as forças por unidade de área do corpo deformado, por essa razão a tensão de Cauchy também é conhecida como tensão verdadeira.

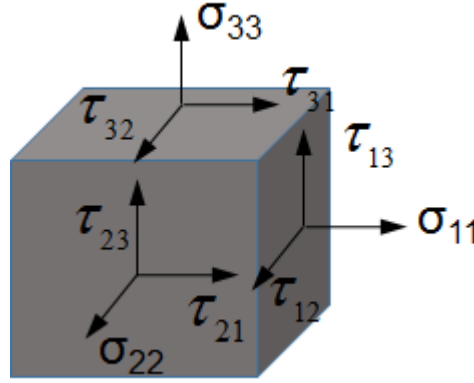


Figure 5: Significado físico do tensor de tensão de Cauchy.

Vale mencionar que através das leis de conservação de momento linear e angular pode-se provar que o tensor de Cauchy é simétrico $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

2 Outras medidas de tensão

O tensor de tensão de Cauchy (Força corrente na configuração corrente - descrição Euleriana) possui uma interpretação física direta para o estado de forças atuantes em um corpo deformado. Porém existem outras medidas usadas para tensão sendo que algumas delas não possuem uma interpretação física sendo somente uma idealização matemática utilizada para simplificar o equacionamento dos problemas de mecânica do contínuo.

Por exemplo o tensor de tensão de Kirchhoff, $\tau = J\sigma$ não possui uma interpretação física direta. Esta medida de tensão é utilizada em plasticidade onde não há mudança de volume.

Para outras medidas de tensão, vamos inicialmente estudar a mudança de um elemento de área da configuração de referência para a configuração corrente.

2.1 Fórmula de Nanson - Mudança de área

Inicialmente considere um corpo com um elemento de área $d\vec{\Gamma}_0$ definida pelo vetor normal $\vec{n}_0$. Portanto pode-se escrever $d\vec{\Gamma}_0 = \vec{n}_0 d\Gamma_0$.

Considere que uma linha material qualquer, representada pelo vetor $d\vec{X}$ passe por um ponto do elemento de área $d\vec{\Gamma}_0$ de modo que $d\vec{X}_0 \cdot d\vec{\Gamma}_0 > 0$. Portanto o cilindro formado pelo elemento de área $d\vec{\Gamma}_0$ e pela geratriz $d\vec{X}$ possui volume $dV_0 = d\vec{X}_0 \cdot d\vec{\Gamma}_0$.

Considere agora que esse corpo passou por uma mudança de configuração de forma que o elemento de área $d\vec{\Gamma}$ é agora definido pelo vetor normal $\vec{n}$, e de maneira análoga pode-se escrever $d\vec{\Gamma} = \vec{n} d\Gamma$. Já o volume do cilindro para a configuração corrente é $dV = d\vec{X} \cdot d\vec{\Gamma}$.

A figura 6 ilustra a situação descrita anteriormente [2].

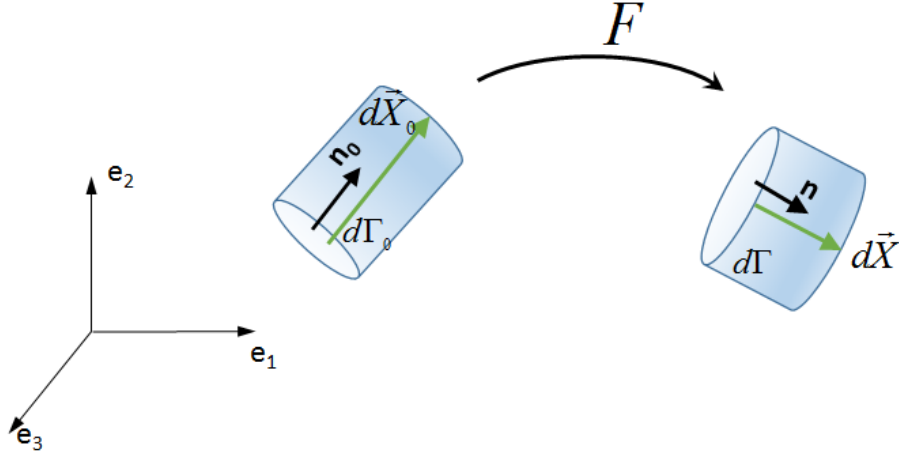


Figure 6: Mudança de área.

Sabe-se que $dV = JdV_0$, ou $d\vec{X} \cdot d\vec{\Gamma} = Jd\vec{X}_0 \cdot d\vec{\Gamma}_0$. Também é conhecido que $d\vec{X} = Fd\vec{X}_0$. Trabalhando algebricamente a relação de volume tem-se:

$$d\vec{X} \cdot \vec{n} d\Gamma = Jd\vec{X}_0 \cdot \vec{n}_0 d\Gamma_0 \quad (11)$$

$$Fd\vec{X}_0 \cdot \vec{n} d\Gamma = J\vec{C} \cdot \vec{n}_0 d\Gamma_0 \quad (12)$$

Como o vetor $d\vec{X}_0$ é arbitrário:

$$F\vec{n} d\Gamma = J\vec{n}_0 d\Gamma_0 \quad (13)$$

Por fim chega-se na fórmula de Nanson:

$$d\vec{\Gamma} = JF^{-1}d\vec{\Gamma}_0 = JBd\vec{\Gamma}_0 \quad (14)$$

2.2 Tensor de tensão de Piolla-Kirchhoff de primeira espécie

Da segunda lei de Newton temos a seguinte equação para um corpo qualquer:

$$\int_{\Omega} \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i d\Gamma = \int_{\Omega} \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (15)$$

Note que essa equação é escrita para a configuração corrente, portanto Euleriana. Aplicando a fórmula de Cauchy e o teorema do divergente a equação acima, em descrição Euleriana, é escrita como:

$$\int_{\Omega} \rho b_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (16)$$

Uma vez que a equação acima é válida para todos os pontos que compoem o corpo, pode-se escrever:

$$\rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \dot{v}_i \quad (17)$$

Essa equação é a equação de movimento Euleriana. Voltando agora para a equação da segunda lei de Newton, escrita na configuração corrente, escreve-se a mesma na configuração de referência, ou Lagrangeana utilizando a fórmula de Nanson.

$$\int_{\Omega} {}_o\rho_0 b_i J d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} J \sigma_{ij} B_{jk} dX_0^k d\Gamma_0 = \int_{\Omega} {}_0\rho \dot{v}_i J d\Omega_0 \quad (18)$$

Onde dX_0^k é o componente k do vetor $d\vec{X}_0$.

Note que a equação acima, que é Lagrangeana, é bastante parecida com a equação da segunda Lei em descrição Euleriana, portanto da equação acima define-se o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Esse tensor também é conhecido como tensor de tensão nominal.

$$P_{ki} = J F_{kj}^{-1} \sigma_{ij} \quad (19)$$

Note que esse é um tensor de dois pontos, ou seja, relaciona a configuração corrente com a configuração de referência. E por esse motivo, esse tensor de tensão não é simétrico.

No caso do primeiro Piola-Kirchhoff este pode ser entendido como a força na configuração corrente aplicada na área de referência.

Usando a definição do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie, a equação de movimento em descrição Lagrangeana fica:

$$\rho_0 b_i^0 + \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_j} = \rho_0 \dot{v}_i \quad (20)$$

2.3 Tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie

Considerando que o vetor de forças pode ser escrito como:

$$df = F df_0 \quad (21)$$

Reescrevendo a equação acima, lembrando que $df = P n_0 d\Gamma_0$, chega-se:

$$df_0 = F^{-1} P n_0 d\Gamma_0 = F^{-1} t_0 d\Gamma_0 \quad (22)$$

Portanto define-se o segundo tensor de Piola-Kirchhoff como sendo $S = F^{-1} P$. O tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie também é conhecido como tensor de tensão material.

Na prática essas outras medidas de tensão não possuem um significado físico muito claro, sendo que o tensor de Cauchy é o melhor definido fisicamente. Essas outras medidas de tensão é melhor interpretada no sentido de forças generalizadas que são conjugados energéticos (realizam trabalho) de certas medidas de mudança de configuração.

2.3.1 Medidas de tensão para pequenas deformações

Já para o caso de pequenas deformações, é possível demonstrar via decomposição binomial, que os diferentes tensores de tensão são equivalentes $\sigma \approx \tau \approx P \approx S$.

3 Conjugado Energético

O trabalho realizado por uma força é definido como o produto interno da força pelo deslocamento conforme a equação abaixo:

$$W = \int F \cdot dx \quad (23)$$

Já a potência é definida como a taxa do trabalho. Tomando a quantidade infinitesimal de trabalho como sendo $dW = F \cdot dx$, escreve-se a potência como:

$$Pot = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} = F \cdot v \quad (24)$$

De maneira análoga a feita para força e deslocamento, pode-se escrever a potência em termos de tensão e taxa de deformação.

Considerando que as forças atuantes em um corpo podem ser internas e externas, a força total é escrita como apresentado pela equação 5. Portanto a potência pode ser escrita como:

$$Pot = \int_{\Omega} \rho b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot v d\Gamma \quad (25)$$

Aplicando a fórmula de Cauchy $t = n\sigma$:

$$Pot = \int_{\Omega} \rho b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma n \cdot v d\Gamma \quad (26)$$

Aplicando o teorema do divergente:

$$Pot = \int_{\Omega} \rho b \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\sigma \cdot v) d\Omega \quad (27)$$

Expandindo o segundo termo do lado direito da equação 27:

$$Pot = \int_{\Omega} \rho b \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \text{div}(v) d\Omega \quad (28)$$

Em notação indicial a equação 28 é escrita como:

$$Pot = \int_{\Omega} \rho b_i v_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega \quad (29)$$

Da segunda lei de Newton, escrita em notação Euleriana na equação 17, isola-se o termo do divergente do tensor de tensão de Cauchy e substitui na equação 28 (ou 29) resultando em:

$$Pot = \int_{\Omega} \rho b \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} (\rho \dot{v} - \rho b) \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \text{div}(v) d\Omega \quad (30)$$

Expandindo a equação 30, e recordando da taxa da energia cinética, obtem-se:

$$Pot = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : \text{div}(v) d\Omega \quad (31)$$

Por fim, o gradiente do vetor de velocidades é dado $\text{div}(v) = v_{i,j} = L$. Esse tensor de segunda ordem pode ser decomposto em uma parte simétrica (velocidade linear) mais uma parte anti-simétrica (rotações) $L = D + W$. Portanto obtem-se:

$$Pot = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : D d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : W d\Omega \quad (32)$$

Sabendo que o tensor de tensão de Cauchy, σ , é simétrico é que o tensor de rotações, W , é antisimétrico temos que o produto $\sigma_{ij} D_{ij} = -\sigma_{ij} D_{ji} = -\sigma_{ji} D_{ji} = -\sigma_{ij} D_{ij}$, portanto $2\sigma_{ij} D_{ij} = 0$, segue que:

$$Pot = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho v \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : D d\Omega \quad (33)$$

Na equação 33 facilmente verifica-se que a potência é resultante do movimento do corpo (primeiro termo do lado direito da equação representada pela taxa da energia cinética) e das deformações do corpo (segundo termo do lado direito da equação).

Do segundo termo do lado direito da equação 33 verifica-se que o termo que aparece com o tensor de tensão de Cauchy é o seu conjugado energético,

sendo que para o tensor de Cauchy é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade $D = \frac{1}{2}(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i})$.

Para obtermos o conjugado energético do tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie começaremos pelo segundo termo do lado direito da equação 33.

$$A = \int_{\Omega} \sigma : D d\Omega \quad (34)$$

Sabendo-se que $D = \frac{1}{2}(L + L^T)$ tem-se:

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \sigma : L d\Omega + \int_{\Omega} \sigma : L^T d\Omega \right) \quad (35)$$

Como σ é simétrico:

$$A = \int_{\Omega} \sigma : L d\Omega \quad (36)$$

Temos que a taxa do tensor de mudança de configuração F é dado por [3]:

$$\frac{dF_{iJ}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_J} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} = L_{ik} F_{kJ} \quad (37)$$

Portanto $L = \frac{dF}{dt} F^{-1}$. Substituindo na equação ??.

$$A = \int_{\Omega} \sigma : \frac{dF}{dt} F^{-1} d\Omega \quad (38)$$

Chamando $\frac{dF}{dt} = \dot{F}$, e lembrando que $d\Omega = J d\Omega_0$, ou seja mudando da descrição Euleriana para uma descrição Lagrangeana, a equação 38 fica escrita como:

$$A = \int_{\Omega_0} \sigma : \dot{F} F^{-1} J d\Omega_0 \quad (39)$$

Da equação 19 onde foi obtido o primeiro Piola-Kirchhoff, e substituindo na equação 39, após um reordenação dos termos, temos:

$$A = \int_{\Omega_0} P : \dot{F} d\Omega_0 \quad (40)$$

Temos que o conjugado energético do tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie é a taxa do tensor de mudança de configuração.

O conjugado energético do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é obtido de maneira análoga. Novamente começaremos pelo segundo termo do lado direito da equação 33.

$$A = \int_{\Omega} \sigma : D d\Omega \quad (41)$$

Pode-se escrever $D = F^{-T} \dot{E} F^{-1}$, portanto a equação 41 fica:

$$A = \int_{\Omega} \sigma : F^{-T} \dot{E} F^{-1} d\Omega \quad (42)$$

Trazendo a equação 42 para a configuração de referência, temos:

$$A = \int_{\Omega_0} \sigma : F^{-T} \dot{E} F^{-1} J d\Omega_0 \quad (43)$$

Rearranjando os termos da equação 43 e utilizando a definição do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie dada pela equação 22 ($S = F^{-1}P = JF^{-1}\sigma F^{-T}$) chega-se na equação 44.

$$A = \int_{\Omega_0} S : \dot{E} d\Omega_0 \quad (44)$$

Portanto o conjugado energético do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, S é a taxa do tensor de pequenas deformações $\dot{E}$.

4 Exemplo de aplicação

Um exemplo simples do comportamento dos tensores de tensão pode ser dado através de um ensaio de tração de um elastomero, onde o volume se conserva. Portanto pode-se escrever $A_0 L_0 = AL$. Rearranjando os termos dessa equação.

$$\frac{A_0}{A} = \frac{L}{L_0} = 1 + \epsilon \quad (45)$$

Sabendo que a tensão de Cauchy é dada por $\sigma = Force/A$ e que usualmente a tensão obtida nos ensaios de tração é dada por $\sigma^{eng} = Force/A_0$, que nesse caso seria equivalente ao tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Como a força aplicada nos dois casos é a mesma, tem-se $\sigma A = \sigma A_0$. Rearranjando essa equação e aplicando na equação 45, tem-se:

$$\sigma = \sigma^{eng}(1 + \epsilon) \quad (46)$$

A equação 46 nos permite concluir que a tensão de Cauchy é praticamente igual a tensão de engenharia para pequenas deformações. Mas a medida que a deformação aumenta, para o caso de tração, a tensão de Cauchy é maior que a tensão de engenharia. Já para o caso da compressão a tensão de Cauchy é menor (em valor absoluto) que a tensão de engenharia.

Para o caso de um ensaio de tração/compressão com volume constante ($J = 1$) temos que o tensor de mudança de configuração é dado por:

$$F = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \epsilon)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \epsilon)^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (47)$$

E o inverso é dado por:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} (1 + \epsilon)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \epsilon)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \epsilon)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Portanto o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie é dado por:

$$P = \sigma^{eng} \quad (49)$$

E o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é dado por:

$$S = \frac{\sigma^{eng}}{(1 + \epsilon)} \quad (50)$$

A figura abaixo mostra o comportamento dos diferentes tensores de tensão para esse caso.

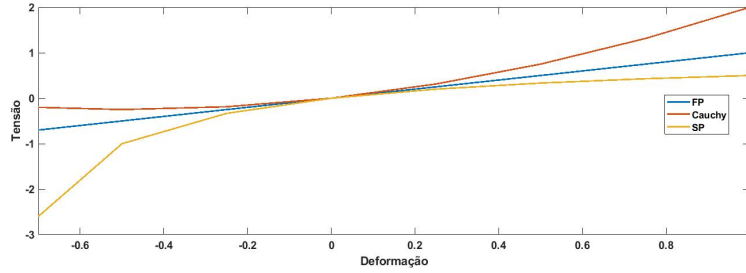


Figure 7: Comportamento dos diferentes tensores de tensão para ensaio de tração em um elastômero conservando o volume.

References

- [1] Jorgen Bergstrom. *Mechanics of Solid Polymers*. William Andrew Publishing, 2015.
- [2] R.W. Ogden. *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 1997.
- [3] A.J.M. Spencer. *Continuum Mechanics*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.