Lista 10. Cadeias de Markov tempo contínuo II. (sexta 27/11/2020)

Exercício 1. Escrever as equações de Kolmogorov backward e forward para processo de Poisson com intensidade λ e para o processo de nascimento e morte em geral. Para processos de Poisson conhecemos as probabilidades $P_{ij}(t)$, conferir que eles satisfazem equações backward. O que pode ser dito sobre a medida invariante.

Solução: Equações de Kolmogorov Backward

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t) \quad \text{para todos estados } i, j \text{ e tempo } t \geq 0,$$

Escrevemos equações backward para $P_{0i}(t)$

$$\begin{aligned}
P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) \\
P'_{01}(t) &= \lambda P_{11}(t) - \lambda P_{01}(t) \\
P'_{02}(t) &= \lambda P_{12}(t) - \lambda P_{02}(t) \\
P'_{03}(t) &= \lambda P_{13}(t) - \lambda P_{03}(t) \\
&\dots
\end{aligned}$$

Sabemos

$$P_{0k}(t) = \mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

é fácil verificar que eles satisfazem equações

$$\left(\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right)' = \lambda \left(\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \right) - \lambda \left(\frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right).$$

Escrevemos equações de Kolmogorov Forward:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - v_j P_{ij}(t) \quad \text{para todos estados } i, j \text{ e tempo } t \geq 0,$$

Escrevemos equações backward para $P_{0i}(t)$

$$\begin{aligned}
P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) \\
P'_{01}(t) &= P_{00}(t)\lambda - \lambda P_{01}(t) \\
P'_{02}(t) &= P_{01}(t)\lambda - \lambda P_{02}(t) \\
P'_{03}(t) &= P_{02}(t)\lambda - \lambda P_{03}(t) \\
&\dots
\end{aligned}$$

Observe, que backward e forward são equivalentes. Descrevemos forward para achar invariante:

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda P_{00}(t) \\
0 &= P_{00}(t)\lambda - \lambda P_{01}(t) \\
0 &= P_{01}(t)\lambda - \lambda P_{02}(t) \\
0 &= P_{02}(t)\lambda - \lambda P_{03}(t) \\
&\dots
\end{aligned}$$

Como solução obtemos o vetor de 0's: $(0, 0, \dots)$. O que está de acordo com o fato que todos os estados de processo de Poisson são transitórios. □

Exercício 2. Considere cadeia com três estados $\{0, 1, 2\}$ e taxas de transição $q_{01} = q_{12} = \lambda$ e $q_{21} = q_{10} = \mu$. Escreve forward e backward para todos $P_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, 2$. A cadeia é reversível? Escreva equações para medida invariante e tenta resolve-las usando balanço detalhado.

Solução: Equações de Kolmogorov Backward

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t) \quad \text{para todos estados } i, j \text{ e tempo } t \geq 0,$$

Escrevemos equações backward

$$\begin{aligned}
P'_{00}(t) &= \lambda P_{10}(t) - \lambda P_{00}(t)\\
P'_{01}(t) &= \lambda P_{11}(t) - \lambda P_{01}(t)\\
P'_{02}(t) &= \lambda P_{12}(t) - \lambda P_{02}(t)\\
P'_{10}(t) &= \lambda P_{20}(t) + \mu P_{00}(t) - (\lambda+\mu) P_{10}(t)\\
P'_{11}(t) &= \lambda P_{21}(t) + \mu P_{01}(t) - (\lambda+\mu) P_{11}(t)\\
P'_{12}(t) &= \lambda P_{22}(t) + \mu P_{02}(t) - (\lambda+\mu) P_{12}(t)\\
P'_{20}(t) &= \mu P_{10}(t) - \mu P_{20}(t)\\
P'_{21}(t) &= \mu P_{11}(t) - \mu P_{21}(t)\\
P'_{22}(t) &= \mu P_{12}(t) - \mu P_{22}(t)
\end{aligned}$$

Escrevemos equações de Kolmogorov Forward:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - v_j P_{ij}(t) \quad \text{para todos estados } i, j \text{ e tempo } t \geq 0,$$

Escrevemos equações forward

$$\begin{aligned}
P'_{00}(t) &= P_{01}(t)\mu - \lambda P_{00}(t)\\
P'_{01}(t) &= P_{00}(t)\lambda + P_{02}(t)\mu - (\lambda+\mu) P_{01}(t)\\
P'_{02}(t) &= P_{01}(t)\lambda - \mu P_{02}(t)\\
P'_{10}(t) &= P_{11}(t)\mu - \lambda P_{10}(t)\\
P'_{11}(t) &= P_{10}(t)\lambda + P_{12}(t)\mu - (\lambda+\mu) P_{11}(t)\\
P'_{12}(t) &= P_{11}(t)\lambda - \mu P_{12}(t)\\
P'_{20}(t) &= P_{21}(t)\mu - \lambda P_{20}(t)\\
P'_{21}(t) &= P_{20}(t)\lambda + P_{22}(t)\mu - (\lambda+\mu) P_{21}(t)\\
P'_{22}(t) &= P_{21}(t)\lambda - \mu P_{22}(t)
\end{aligned}$$

Balanço detalhado:

$$\begin{aligned}
P_0\lambda &= P_1\mu\\
P_1\lambda &= P_2\mu\\
P_2 &= 1 - P_0 - P_1
\end{aligned}$$

logo

$$\frac{\mu}{\lambda}P_1 + P_1 + \frac{\lambda}{\mu}P_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{q}{1+q+q^2},\ P_2 = \frac{q^2}{1+q+q^2}, P_0 = \frac{1}{1+q+q^2}$$

em que $q = \frac{\lambda}{\mu}$ $\square$

Exercício 3. Na aula vimos a relação entre a medida invariante para cadeia de Markov com tempo contínuo e a medida invariante de cadeia embutida dela: $P_i \propto \frac{\pi_i}{v_i}$. Considere a cadeia do item anterior. Construa a cadeia de Markov embutida dela, e verifique a relação entre ela e medida invariante que achou para embutida.

Solução: A relação é $P_i \propto \frac{\pi_i}{v_i}$. Achamos medida invariante para embutida (π_0, π_1, π_2) tentando resolver balanço detalhado:

$$\begin{aligned}
\pi_0 \cdot 1 &= \pi_1 \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}\\
\pi_1 \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu} &= \pi_2 \cdot 1\\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1
\end{aligned}$$

logo

$$\pi_0 = \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)},\ \pi_1 = \frac{1}{2},\ \pi_2 = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

a relação verificamos

$$\begin{aligned}
\text{para estado } 0: \quad \frac{\pi_0}{v_0} &= \frac{\mu}{2\lambda(\lambda+\mu)}\\
\text{para estado } 1: \quad \frac{\pi_1}{v_1} &= \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\\
\text{para estado } 2: \quad \frac{\pi_2}{v_2} &= \frac{\lambda}{2\mu(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

então
$$\frac{\pi_0}{v_0}+\frac{\pi_1}{v_1}+\frac{\pi_2}{v_2}=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\mu}{\lambda}+1+\frac{\lambda}{\mu}\right)$$
logo, adotando $\frac{\lambda}{\mu}=q$, obtemos
$$\frac{\frac{\pi_0}{v_0}}{\frac{\pi_0}{v_0}+\frac{\pi_1}{v_1}+\frac{\pi_2}{v_2}}=\frac{1}{1+q+q^2}$$
$$\frac{\frac{\pi_1}{v_1}}{\frac{\pi_0}{v_0}+\frac{\pi_1}{v_1}+\frac{\pi_2}{v_2}}=\frac{q}{1+q+q^2}$$
$$\frac{\frac{\pi_2}{v_2}}{\frac{\pi_0}{v_0}+\frac{\pi_1}{v_1}+\frac{\pi_2}{v_2}}=\frac{q^2}{1+q+q^2}$$
então, as relações $P_i \propto \frac{\pi_i}{v_i}$ são válidos. □

Exercício 4. Suponha seguinte modelo: temos N partículas, cada uma independentemente de outras pode estar em dois estados mecanico-quânticos: estado excitado (mais alta energia) e estado fundamental (energia menor possível). Denotamos os dois estados como 1 (excitado) e 0 (fundamental). Todas as partículas posicionadas em campo de fluxo de energia, por isso, cada partícula que esta em estado 0 transita para estado 1 com a taxa $\lambda, \lambda > 0$ e cada partícula tem a taxa $\mu, \mu > 0$, de transição $1 \to 0$. Seja $X(t)$ número de partículas em estado excitado. Mostre, que $X(t)$ é cadeia de Markov, oferecendo as taxas de transição (q_{ij}) ou em termos (v, P), se preferir. O sistema em equilíbrio deve possuir a distribuição invariante para esse dinâmica. Achar a distribuição invariante. (Dica: sugiro achar invariante pelo balanço detalhado).

Solução: $X(t) \in \{0, 1, \dots, N\}$, as transições
$$\begin{aligned}&k \to k+1 \text{ com taxa } (N-k)\lambda\\&k \to k-1 \text{ com taxa } k\mu\end{aligned}$$
a medida invariante - pelo balanço detalhado:
$$\begin{aligned}\pi_0 N\lambda &= \pi_1\mu\\ \pi_1(N-1)\lambda &= \pi_2 2\mu\\ \pi_2(N-2)\lambda &= \pi_3 3\mu\\ &\dots\\ \pi_k(N-k)\lambda &= \pi_{k+1}(k+1)\mu\\ &\dots\\ \pi_{N-2}2\lambda &= \pi_{N-1}(N-1)\mu\\ \pi_{N-1}\lambda &= \pi_N N\mu\end{aligned}$$
Depois de várias tentativas de resolver, podemos chegar a distribuição binomial
$$\pi_k = p^k(1-p)^{N-k}\binom{N}{k}, \quad \text{em que } \ p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \ k=0,1,\dots,N$$
□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.