Lista 9. Cadeias de Markov tempo contínuo I. (sexta 20/11/2020)

Exercício 1. Suponha, escolhemos $\tilde{v}, \tilde{P}$ para construir cadeia com tempo contínuo, mas a matriz $\tilde{P}$ é matriz qualquer estocástica (sem a restrição $\tilde{p}_{ii} = 0$). Supomos que existe algum estado k, tal que $\tilde{p}_{kk} > 0$. Observe que tal processo existe e vai ser processo markoviano, por causa da distribuição exponencial de tempo de permanência em estados.

Achar v, P da definição (construtiva) para cadeia de Markov construída com $\tilde{v}, \tilde{P}$.

Solução: Supomos que estado k, tal que $\tilde{p}_{kk} > 0$. Calculamos a distribuição de tempo de permanência da cadeia neste estado, que consiste em soma aleatória de exponenciais com a taxa $\tilde{v}_k$: realmente, seja $\xi_i \sim \exp(\tilde{v}_k), i = 1, 2, \ldots$, e seja $\tilde{N}$ é v.a. geométrica com probabilidade de sucesso $\tilde{p}_{kk} > 0$, então o tempo de permanência T_k pode ser representado como

$$T_k = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \xi_i$$

e densidade, lembrando a densidade de soma de exponenciais

$$f_k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\tilde{v}_k t)^{i-1}}{(i-1)!} \tilde{v}_k e^{-\tilde{v}_k t} (1 - \tilde{p}_{kk})(\tilde{p}_{kk})^{i-1} = \tilde{v}_k (1 - \tilde{p}_{kk}) e^{-\tilde{v}_k (1 - \tilde{p}_{kk}) t},$$

assim, $T_k \sim \exp\left(\tilde{v}_k (1 - \tilde{p}_{kk})\right)$. Logo podemos recalcular os parâmetros:

$$v_k = \tilde{v}_k (1 - \tilde{p}_{kk}), \quad p_{kj} = \frac{\tilde{p}_{kj}}{\sum_{i \neq k} \tilde{p}_{ki}}$$

□

Exercício 2. Considere processo de nascimento com taxa de nascimento linear. Cada indivíduo espera o tempo exponencial com a taxa λ para dar a luz um "filho"dele. Assim $\lambda_n = n\lambda, n > 0$, $\lambda_0 = \lambda$ e $\mu_n = 0, n \geq 0$. Esse processo é conhecido também como o processo do Yule, depois de G.Yule usa lo em teoria matemática da evolução.

1. Para esse processo achar a probabilidade $P_{03}(t)$.
2. Seja T_i instante quando o processo atinge primeira vez o estado i. Achar $\mathbb{E}(T_i)$.

Solução:

1. Para esse processo achar a probabilidade $P_{03}(t)$.

Seja ξ_i é a taxa de permanência em estado i, em que $\xi_i \exp(i \cdot \lambda), i \geq 1$, e $\xi_0 \sim \exp(\lambda)$. Então, o instante quando primeira vez o processo atinge o estado 3 é igual a soma $T_3 = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2$ que tem a densidade

$$\begin{aligned} f_{T_3}(t) &= \int_0^t f_{\xi_0 + \xi_1}(s) f_{\xi_2}(t - s) ds = \int_0^t \lambda^2 s e^{-\lambda s} 2\lambda e^{-2\lambda(t-s)} ds \\ &= 2\lambda(\lambda t - 1)e^{-\lambda t} + 2\lambda e^{-2\lambda t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de estar em estado 3 pode ser representada em forma integral

$$\begin{aligned} P_{03}(t) &= \int_0^t f_{T_3}(s) \mathbb{P}(\xi_3 > t - s) ds = \int_0^t f_{T_3}(s) e^{-3\lambda(t-s)} ds \\ &= \int_0^t \left(2\lambda(\lambda s - 1)e^{-\lambda s} + 2\lambda e^{-2\lambda s}\right) e^{-3\lambda(t-s)} ds = \left(\lambda t - \frac{3}{2}\right) e^{-\lambda t} + 2e^{-2\lambda t} - \frac{1}{2} e^{-3\lambda t}. \end{aligned}$$

2. Seja T_i instante quando o processo atinge primeira vez o estado i. Achar $\mathbb{E}(T_i)$.

Como já foi observado o tempo $T_i, i \geq 1$, é representado como a soma $T_i = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{i-1}$ então

$$\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{(i-1)\lambda}\right).$$

□

Exercício 3. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0,1,2\}$, e supomos que estado 0 é estado absorvente. A cadeia é definida através de seguintes taxas de transições: $q_{10} = q_{20} = 1$ e $q_{12} = q_{21} = 2$. Seja T instante quando a cadeia atinge o estado absorvente. Achar a densidade de tempo T e $\mathbb{E}(T)$.

Solução: Observe que se o estado inicial é 0, então $T = 0$. Observe que se o estado inicial é 1 o tempo T tem a mesma distribuição quando estado inicial é 2. Supomos que estado inicial é 1. Seja $\xi_i, i \geq 1$, são sequencia de i.i.d. com a distribuição exponencial $\exp(3)$, então o tempo T pode ser representado como a soma

$$T = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

em que N é quantas vezes a cadeia estou em estados 1 ou 2, e $x_i \sim \exp(3)$ são tempos de permanência em estado 1 ou 2. Observe, que $N \geq 1$. Se a cadeia está em estado 1 (ou 2), então com probabilidade $\frac{2}{3}$ o próximo estado vai ser 2 (ou 1) e com probabilidade $\frac{1}{3}$ atingimos estado absorvente, 0. Assim, N tem a distribuição geométrica: $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$. Se $N = k$ então $\sum_{i=1}^{N} \xi_i$ é gamma com a densidade

$$f_k(t) = \frac{(3t)^{k-1}}{(k-1)!} 3e^{-3t}, \quad k \geq 1$$

então a densidade de T

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{(3t)^{k-1}}{(k-1)!} 3e^{-3t} = e^{-t}$$

ou, seja, $T \sim \exp(1)$, e $\mathbb{E}(T) = 1$. $\square$

Exercício 4. Seja $X(t)$ cadeia de Markov com tempo contínuo dada pela matrix de taxas de transição (q_{ij}). Supondo que $X(0) = i$, mostre que qualquer que seja o estado i a probabilidade que durante o tempo h a cadeia fez pelo menos duas mudanças de estado é uma função $o(h)$. Mostre isso usando o fato que em cada estado a cadeia permanece o tempo exponencial.

Solução: Seja $N(t)$ número de transições que a cadeia faça durante tempo t. Então a probabilidade que precisamos é

$$\mathbb{P}(N(t) \geq 2) = \mathbb{P}(S_2 < t)$$

em que S_2 é instante do segundo "pulo". Sejam ξ_i, ξ_k tempos de permanência em estados i e k respectivamente. Sabemos que $\xi_i \sim \exp(v_i)$ para todos $i \in E$. A densidade de soma das duas exponenciais é a convolução: so para aliviar as anotações seja $v_i = \lambda, v_k = \mu$

$$f_{\xi_i+\xi_k}(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \mu e^{-\mu(t-s)} ds = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}\left(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t}\right) \text{ se } \lambda \neq \mu \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} \text{ se } \lambda = \mu \end{cases}$$

$$f_{S_2}(t) = \sum_{k=0, k\neq i}^{\infty} p_{ik} f_{\xi_i+\xi_k}(t)$$

Logo para temos pequenos h

$$f_{\xi_i+\xi_k}(h) = \begin{cases} v_i v_k h + o(h) \text{ se } v_i \neq v_k \\ v_i^2 h + o(h) \text{ se } v_i = v_k \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(S_2 < h) = \int_0^h f_{S_2}(s) ds = f_{S_2}(h) h + o(h) = h^2 v_i \sum_{k=0, k\neq i}^{\infty} p_{ik} v_k + o(h)$$

Observe, que aqui obtemos a condição para existência do processo: a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} v_k$$

deve convergir. Isso, por exemplo, sempre vale, se número de estados onde a cadeia pode pular é finito. $\square$

Exercício 5. Uma população consiste em indivíduos de dois sexos - fêmeas e machos. Em uma colónia dessa população cada macho e fêmea formam um casal em intervalo h de tempo com probabilidade $\lambda h + o(h)$ e no mesmo instante eles produzem um indivíduo com a mesma probabilidade de ser macho ou fêmea. Cada organismo deixa a colónia durante tempo h com a probabilidade $\mu h + o(h)$. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ número de machos e fêmeas respectivamente dentro da colónia em instante t. Construir a cadeia de Markov com tempo contínuo que descreve a evolução dessa colónia (achar as taxas de transição).

Solução: Caso temos m machos e f fêmeas, então podemos saber número machos e fêmeas em próximo estado, então, estados são pares $E = \{(m, f), m, f \in \mathbb{Z}, m, f \geq 0\}$. Transições

$$
\begin{aligned}
(m, f) \to (m+1, f) &\quad \text{com taxa } \frac{1}{2}\lambda m \cdot f \\
(m, f) \to (m, f+1) &\quad \text{com taxa } \frac{1}{2}\lambda m \cdot f \\
(m, f) \to (m-1, f) &\quad \text{com taxa } \mu \cdot m \\
(m, f) \to (m, f-1) &\quad \text{com taxa } \mu \cdot f \\
(m, 0) \to (m-1, 0) &\quad \text{com taxa } \mu \cdot m \\
(0, f) \to (0, f-1) &\quad \text{com taxa } \mu \cdot f
\end{aligned}
$$

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.

[2] A.B.Clarke, R.L.Disney (1979) *Probabilidade e processos estocásticos.* Capítulo 8.