

QUESTÃO 1

Temos $f(p, v, T) = 0$. Isso amarra uma terceira variável termodinâmica se conhecermos as outras duas.

1.1) - Escrever dp e dv

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp \quad (1)$$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv \quad (2)$$

1.2) - Eliminar dp para encontrar $dv(dT)$

Usando eq.2 em eq.1, temos

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv \right] \quad (3)$$

Isolando dv e dT , chegamos em

$$dv = dT \frac{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right]}{\left[1 - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \right]} \quad (4)$$

1.3) dv e dT devem se anular independentemente. Use isso para encontrar $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$

Se $dv = 0$, o lado direito da eq. 4 só se anula se

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (5)$$

Como $\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -v\kappa$ e $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = v\beta$, temos, após um pouco de álgebra:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{\beta}{\kappa} \quad (6)$$

QUESTÃO 2

Temos $\beta = T^a p^b$ e $\kappa = c \frac{p}{T}$

2.1) Determine o valor de a, b e c

Para resolver tal exercício, notemos que v é uma função de estado. Deste modo, dv é um diferencial exato, e podemos calcular v com base em seu diferencial (eq. 1).

Usando β , temos

$$\frac{dv}{v} = T^a p^b dT \quad (7)$$

Integrando dos dois lados, temos

$$v = F_1(p) \exp \left(\frac{T^{a+1}}{a+1} p^b \right) \quad (8)$$

Repetimos o processo utilizando $\kappa = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$. Isso nos dá

$$v = F_2(T) \exp \left(-\frac{cp^2}{2T} \right) \quad (9)$$

Comparando as duas equações, podemos concluir que $F_1(p) = F_2(T) = F$ e

$$\left(-\frac{cp^2}{2T} \right) = \left(\frac{T^{a+1}}{a+1} \right) p^b \quad (10)$$

O que nos dá $b = 2$, $a = -1$ e $c = 2$. Desse modo, chegamos na equação de estado

$$v = F \times \exp \left(-\frac{p^2}{T} \right) \quad (11)$$

QUESTÃO 3

$$\begin{array}{ll} (1) & (2) \\ p_0 \rightarrow p_0/n & \frac{p_0}{n} \rightarrow \frac{p_0}{n} \\ v_0 \rightarrow v_0 & v_0 \rightarrow v_2 \\ T_0 \rightarrow T_1 & T_1 \rightarrow T_0 \end{array} \quad (12)$$

A ideia é representar esse processo num diagrama pV e calcular o trabalho realizado pelo gás

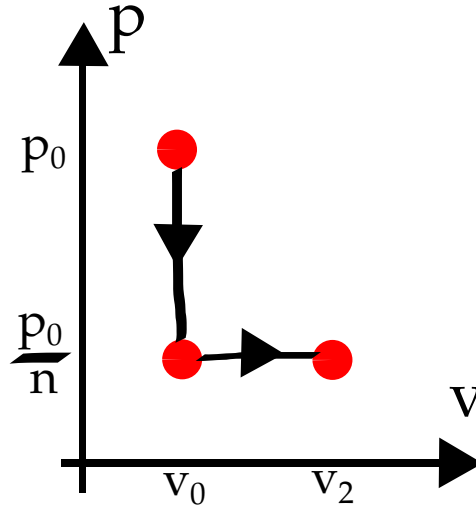


Figura 1: Diagrama de fases

Para calcular o trabalho, basta tomar a área debaixo da curva

$$W = \frac{p_0}{n} \times (v_2 - v_0) \quad (13)$$

E devido a equação dos gases ideais, temos

$$p_0 v_0 = NRT_0 \quad (14)$$

$$\frac{p_o}{n} v_2 = NRT_0 \quad (15)$$

o que nos dá

$$v_2 = nv_0 \quad (16)$$

Chegamos então à expressão final para o trabalho (ele é positivo pois é o trabalho realizado **pelo** sistema, não **no** sistema).

$$W = p_0 v_0 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (17)$$

4) DIAGRAMA $p - T$ (imagem na prova)

Nesse caso, v varia devagar e κ e β são constantes. Podemos escrever a variação de v como

$$dv = v(-\kappa dp + \beta dT) \quad (18)$$

4.1) Transformação na qual p e T mantém uma relação linear

Podemos escrever (observando o gráfico) que a relação entre p e T é dada pela eq.19

$$p = \frac{(p_2 - p_1)}{(T_2 - T_1)} (T - T_1) + p_1 \quad (19)$$

Podemos calcular o trabalho realizado pelo sistema usando a fórmula $W = \int p dV = v \int p(-\kappa dp + \beta dT)$. Isso nos dá

$$v \int p(-\kappa dp) = \kappa v \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} \right) \quad (20)$$

$$\int dT \beta \frac{(p_2 - p_1)}{(T_2 - T_1)} (T - T_1) + p_1 = v \beta (T_2 - T_1) \frac{(p_2 + p_1)}{2} \quad (21)$$

O trabalho nos dá

$$W = -\kappa v \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} \right) + v \beta (T_2 - T_1) \frac{(p_2 + p_1)}{2} \quad (22)$$

4.2) Transformação indo de $1 \rightarrow 3$ (isobárica) e de $3 \rightarrow 2$ (isotérmica)

$$W_{1-3} = \int p dV = \int p_1 v \beta dT = p_1 v \beta (T_2 - T_1) \quad (23)$$

$$W_{3-2} = \int p dV = v \int p(-\kappa dp) = -\kappa v \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} \right) \quad (24)$$

Dando-nos o trabalho total

$$W = p_1 v \beta (T_2 - T_1) - \kappa v \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} \right) \quad (25)$$

4.3) Discuta e compare os resultados acima

É interessante notar que a parte do trabalho relativa ao coeficiente κ é igual nos dois casos, mas a parte relativa ao coeficiente β é diferente. Uma depende da pressão inicial p_1 (pois a parte na qual há variação de temperatura é isobárica), e a outra depende da pressão média do processo, $\frac{(p_2 + p_1)}{2}$. O trabalho em $1 \rightarrow 2$ é, então, maior do que no caso $1 \rightarrow 3 + 3 \rightarrow 2$.