Lista 5 Suplementar

Nícolas André da Costa Morazotti

14 de dezembro de 2020

Questão 1

Uma pessoa à beira de uma estrada quer medir o comprimento de um ônibus que vai passar a sua frente. Ele se prepara, com uma máquina fotográfica, e aguarda. Quando o ônibus passa, ele tira uma foto da frente e, um segundo mais tarde, tira uma foto da parte traseira. A primeira foto mostra a frente do ônibus passando por uma árvore, e a segunda mostra a traseira passando por uma pedra. O fotógrafo, então, atravessa a estrada para medir a distância entre a árvore e a pedra, verifica que a árvore está $10m$ adiante da pedra e conclui que o ônibus tem $10m$ de comprimento. Faça uma crítica desse procedimento, isto é, discuta se ele é preciso ou não e estime eventual erro na medida. Para isso, adote um valor razoável para a velocidade do ônibus na estrada (a velocidade máxima permitida é $90km/h$).

Se o ônibus se move exatamente a $90km/h$, quer dizer que em um segundo ele avançou

$$\begin{aligned}\Delta x &= 90\frac{km}{h}\cdot 1s && (1)\\ &= \frac{90}{3.6}m && (2)\\ &= 25m. && (3)\end{aligned}$$

Assim, para a traseira do ônibus alcançar a pedra, após este segundo, ela precisou andar $25m$. Assim, o comprimento total do ônibus deve ser $10m$, mais a distância da traseira à pedra, de $25m$, o que leva a um comprimento real 3.5 vezes maior que a medida pelo indivíduo.

Caso o ônibus esteja a velocidades usualmente menores (algumas rodovias limitam a $60km/h$), a distância percorrida pelo ônibus é de

$$\begin{aligned}\Delta x &= 60\frac{km}{h}\cdot 1s && (4)\\ &= \frac{60}{3.6}m && (5)\\ &= 16.7m, && (6)\end{aligned}$$

que causa um erro de 2.67 vezes, e o ônibus mede em verdade 26.7 m.

Questão 2

Uma física mede precisamente o tamanho de uma barra que passa a sua frente com velocidade $v = 4c/5$, como ilustrado pela figura 1. Para isso, ela define os referenciais mostrados na figura de forma que as origens coincidam no instante $t = t' = 0$. Em seguida, com a ajuda de uma legião de mínions dotados de cronômetros sincronizados, ela adota o procedimento discutido em classe e pede que os mínions fiquem de olho nas pontas da barra. Aquele que vir a ponta dianteira a sua frente no instante $t = 1s$ deve levantar a mão, assim como aquele que vir a ponta traseira, no mesmo instante. Se, no final da medida, os mínions com as mãos levantadas estão a $1m$ um do outro, que tamanho L_0 tem a barra no referencial móvel?

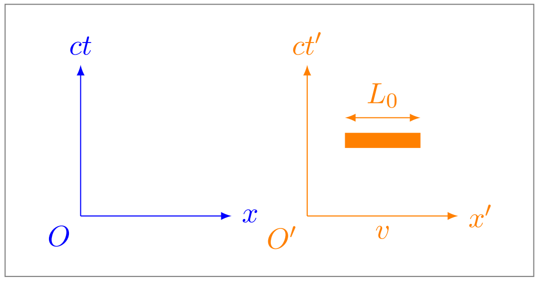


Figura 1: Questões 2 e 3.

Assim como na questão 1, a barra é menor para o referencial do laboratório que em um referencial em que ela está em repouso. O comprimento no referencial do laboratório é

$$l = x_2 - x_1 \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

onde x_i são as posições de cada um dos mínions que levantaram a mão. No referencial em movimento, podemos escrever

$$x'_1 = \gamma x_1 - \beta c t_1, \tag{9}$$
$$x'_2 = \gamma x_2 - \beta c t_2. \tag{10}$$

Como os mínions levantaram as mãos simultaneamente (no referencial do laboratório), $t_1 = t_2$. Então

$$x'_2 - x'_1 \equiv l' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \tag{11}$$
$$l' = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12}$$
$$= \frac{l}{\sqrt{1-16/25}} \tag{13}$$
$$= \frac{l}{\sqrt{9/25}} \tag{14}$$
$$= \frac{l}{3/5} \tag{15}$$
$$= \frac{5l}{3} \tag{16}$$
$$\approx 1.67m. \tag{17}$$

Questão 3

Na questão 2, no referencial móvel,

a) Qual dos mínions (o mais próximo o da origem ou o que está mais distante) levantou a mão primeiro?

Para descobrir, vamos transformar os tempos do referencial do laboratório para o referencial da barra. A transformação inversa do tempo se dá como

$$ct = \gamma ct' + \beta\gamma x'. \tag{18}$$

Então

$$ct = \begin{cases} \gamma ct'_1 + \beta\gamma x'_1 \\ \gamma ct'_2 + \beta\gamma x'_2 \end{cases}. \tag{19}$$

$$\gamma ct'_2 + \beta\gamma x'_2 = \gamma ct'_1 + \beta\gamma x'_1 \tag{20}$$
$$\gamma c(t'_2 - t'_1) = \beta\gamma(x'_1 - x'_2) \tag{21}$$
$$c(t'_2 - t'_1) = \beta(x'_1 - x'_2). \tag{22}$$

Se o mínion na posição x_1 é o que observou a ponta traseira, sabemos que $x'_1 - x'_2 < 0$ e portanto $t'_1 > t'_2$. Dessa forma, no referencial da barra, o mínion que observa a ponta dianteira o faz primeiro.

b) Quanto tempo passou entre o primeiro mínion levantar a mão e o segundo levantar a mão?

A diferença temporal entre os mínions levantarem suas respectivas mãos é, então,

$$t'_1 - t'_2 = \frac{\beta}{c} l' \tag{23}$$
$$= \frac{4}{5c}\frac{5}{3} \tag{24}$$
$$= \frac{4}{3c} \tag{25}$$
$$\approx 4.44 \cdot 10^{-9} s. \tag{26}$$

Questão 4

Suponha que, em lugar de empregar o procedimento descrito na questão 2, outro físico dispense todos os mínions, exceto dois. Ele manda os mínions subirem na barra e medirem, ao mesmo tempo (no referencial deles), as posições das extremidades da barra. O primeiro mínion informa que a ponta de trás está na origem do referencial móvel no instante $t' = 0$, quando fez a medida. O segundo informa que a ponta da frente da barra está em $x' = a$, no mesmo instante. O físico anota as coordenadas informadas pelos mínions e aplica a transformação de Lorentz para calcular as coordenadas dos mesmos eventos no seu próprio referencial.

a) Qual é o tamanho da barra que ele obtém?

Utilizando os resultados que os mínions ofereceram ao físico, podemos escrever as posições no referencial do laboratório como

$$x = \gamma x' + \beta\gamma ct' \tag{27}$$
$$x_{traseira} = 0 \tag{28}$$
$$x_{dianteira} = \gamma a \tag{29}$$
$$l = x_{dianteira} - x_{traseira} = \gamma a. \tag{30}$$

Claramente, no referencial dos mínions, a barra tem um tamanho $l' = a$. Para o físico,

$$l = \gamma l' \tag{31}$$
$$= \frac{25}{9} \neq 1m. \tag{32}$$

b) Esse valor está correto?

Não c) Caso negativo, o que houve de errado com o procedimento do físico?

O físico fez a transformação assumindo que o tamanho da barra, no referencial dele, seria $x_{dianteira} - x_{traseira}$. Contudo, em seu referencial, as marcações de posição **não são** concomitantes, o que causa um deslocamento da barra e sua imprecisão na medida.

Questão 5

A Terra gira em torno do Sol com velocidade de, aproximadamente, $30km/s$. Por isso, os relógios aqui na Terra funcionam num ritmo diferente do que funcionariam se estivessem estacionados no centro de massa do sistema solar. Calcule a diferença, em segundos, entre o tempo decorrido desde o dia em que você nasceu num relógio na Terra e o tempo desde seu nascimento medido por um relógio estacionado no centro de massa do sistema solar.

O relógio estacionado é o referencial do laboratório. A transformação de Lorentz nos diz que, em seu referencial,

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Assim, em segundos, a variação temporal no referencial do laboratório é de

$$c\Delta t = \gamma c \Delta t' + \beta\gamma\Delta x'. \tag{34}$$

Em nosso referencial, $\Delta x' = 0$, o que leva a

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{35}$$
$$\beta = \frac{30}{3 \cdot 10^5} \tag{36}$$
$$= 10^{-4} \tag{37}$$
$$\beta^2 = 10^{-8} \tag{38}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{39}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-10^{-8}}} \tag{40}$$
$$\approx 1 + \frac{1}{2}10^{-8}. \tag{41}$$

Isso nos diz que

$$\Delta t \approx \left(1 + \frac{1}{2}10^{-8}\right)\Delta t' \tag{42}$$
$$\Delta t - \Delta t' = \frac{1}{2}\Delta t' \cdot 10^{-8}. \tag{43}$$

Nasci dia 24/06/1994, e portanto

```python
import datetime as dt

birthday = dt.date(1994,6,24)
today = dt.date.today()
t = (today-birthday).total_seconds()
print(f"Tempo medido na Terra, em segundos, desde meu nascimento: {t} s")
print(f"Diferença entre os relógios: {t*1e-8/2:.2f} s")
```

```
Tempo medido na Terra, em segundos, desde meu nascimento: 835488000.0 s
Diferença entre os relógios: 4.18 s
```

$$\Delta t - \Delta t' \approx 4.18s. \tag{44}$$

Questão 6

Na situação da figura 2, suponha que, no referencial móvel, o sino está parado na posição $x' = a$. O sino toca pela primeira vez no instante $t = t' = 0$, quando a origem dos dois sistemas coincide. No referencial móvel, o sino toca, pela segunda vez, no instante $t' = \tau_0$.

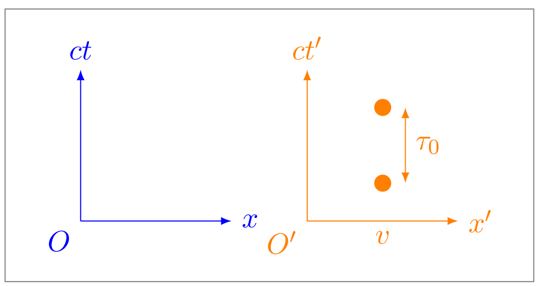


Figura 2: Questão 6.

a. No referencial de laboratório, onde está o sino quando toca pela segunda vez?
Quando o sino toca pela primeira vez, ele está em

$$x_1 = \gamma x'_1 + \beta\gamma c t'_1 \tag{45}$$
$$= \gamma a, \tag{46}$$

com $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Quando ele toca da segunda vez, sua posição é

$$x_2 = \gamma x'_2 + \beta\gamma c t'_2 \tag{47}$$
$$= \gamma a + \beta\gamma c \tau_0. \tag{48}$$

Em geral, sua posição é escrita como

$$x = \gamma a + \beta\gamma c t' \tag{49}$$
$$= \gamma a + \beta\gamma(\gamma c t - \beta\gamma x) \tag{50}$$
$$= \gamma a + \beta\gamma^2 c t - \beta^2\gamma^2 x \tag{51}$$
$$x = \frac{\gamma}{1 + \beta^2\gamma^2} a + \frac{\beta\gamma^2}{1 + \beta^2\gamma^2} c t. \tag{52}$$

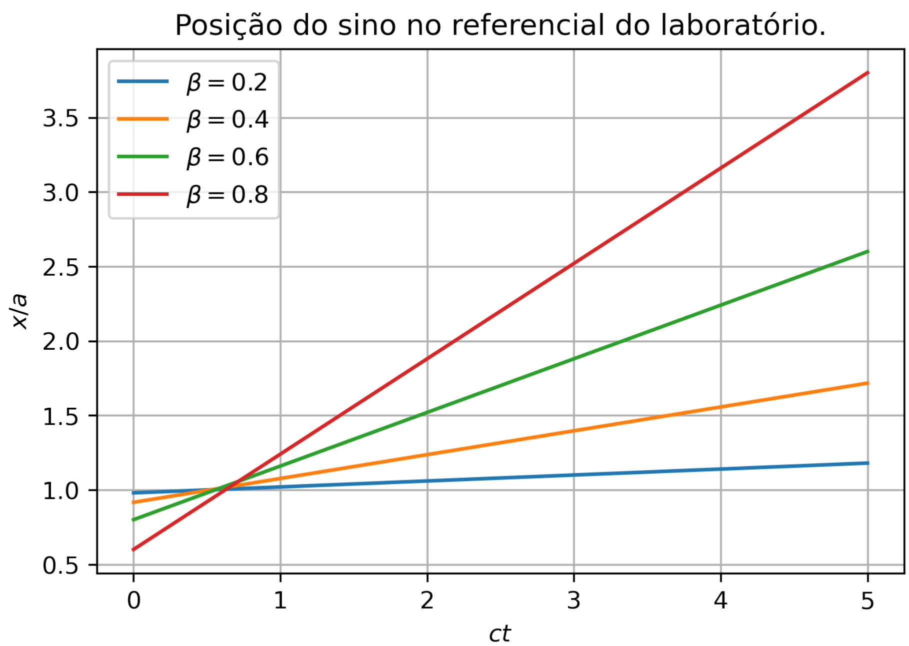
Por fim, veja que

$$1 + \beta^2\gamma^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \tag{53}$$
$$= \frac{1-\beta^2+\beta^2}{1-\beta^2} \tag{54}$$
$$= \gamma^2. \tag{55}$$

Com isso, simplificamos a expressão para

$$x = \frac{a}{\gamma} + \beta ct. \tag{56}$$

b. Faça um gráfico para mostrar a posição x do sino em função do tempo t no referencial de laboratório.



Questão 7

Mostre que a transformação de Lorentz se reduz à transformação de Galileu, vista me Física I, para referenciais móveis com velocidades muito inferiores à velocidade da luz.

A transformação de Galileu é dada por

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}, \tag{57}$$

enquanto a transformação de Lorentz é dada por

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \beta\gamma ct \\ ct' = \gamma ct - \beta\gamma x \end{cases}. \tag{58}$$

Usando a transformação de Lorentz, vamos expandir o fator γ para velocidades pequenas ($\beta \ll 1$):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{59}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2. \tag{60}$$

Substituindo na transformação de Lorentz e considerando termos com ordem menor que $\mathcal{O}(\beta)$ (e lembrando que $\beta c = v$ é considerável),

$$\begin{cases} x' \approx x + \frac{1}{2}\beta^2 x - \beta ct - \frac{1}{2}\beta^3 ct \\ ct' \approx ct + \frac{1}{2}\beta^2 ct - \beta x - \frac{1}{2}\beta^3 x \end{cases} \tag{61}$$

$$= \begin{cases} x' \approx x - vt \\ t' \approx t \end{cases}. \tag{62}$$

Questão 8

No referencial de laboratório, dois eventos A e B estão separados por uma distância Δx e um intervalo de tempo Δt. Num referencial que se move com velocidade v, os mesmos eventos estão separados por uma distância $\Delta x'$ e um intervalo $\Delta t'$. Mostre que

$$(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2. \tag{63}$$

Sugestão: Escreva a transformação de Lorentz para relacionar $\Delta x'$ e $\Delta t'$ com Δx e Δt. Em seguida, inverta a ordem temporal dos dois eventos (sem mudar as posições), para escrever a equação matricial que relaciona $\Delta x'$ e $-\Delta t'$ com Δx e $-\Delta t$. Em seguida, transponha esta última equação matricial e multiplique pela primeira transformação.

Seguindo a sugestão, precisamos escrever

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x' \\ c\Delta t' \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Invertendo a ordem temporal, $\beta \to -\beta$. Assim,

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ -c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x' \\ -c\Delta t' \end{pmatrix} \tag{66}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x & -c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x' & -c\Delta t' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}. \tag{67}$$

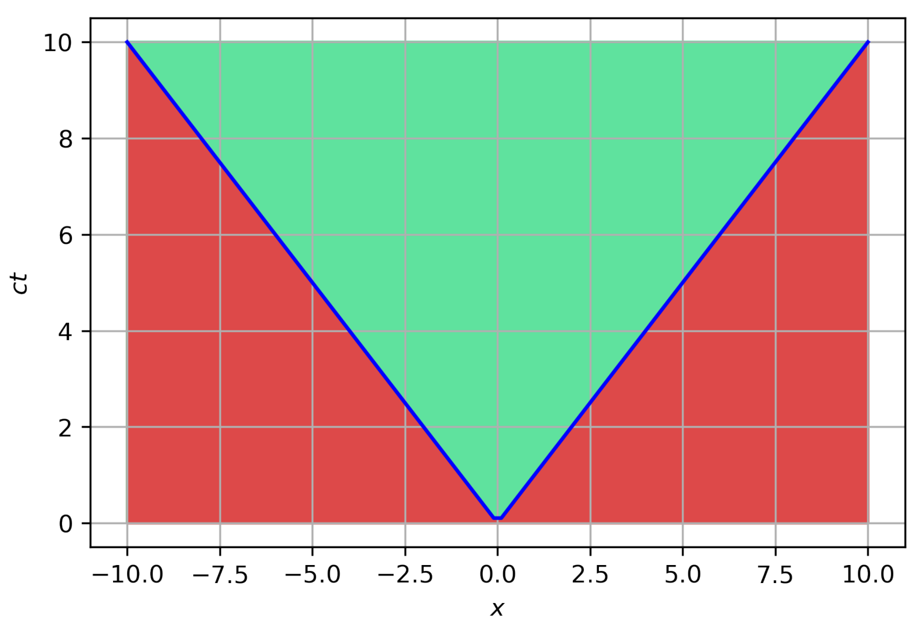
O invariante $[(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2]$ pode ser escrito pelo produto das equações (65) e (67).

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\Delta x & -c\Delta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ c\Delta t\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\Delta x' & -c\Delta t'\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \beta\gamma\\ \beta\gamma & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & -\beta\gamma\\ -\beta\gamma & \gamma\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x'\\ c\Delta t'\end{pmatrix} && (68)\\
&= \begin{pmatrix}\Delta x' & -c\Delta t'\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\gamma^2-\beta^2\gamma^2 & 0\\ 0 & \gamma^2-\beta^2\gamma^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x'\\ c\Delta t'\end{pmatrix} && (69)\\
&= \begin{pmatrix}\Delta x' & -c\Delta t'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma^2(1-\beta^2)\Delta x'\\ \gamma^2(1-\beta^2)c\Delta t'\end{pmatrix} && (70)\\
&= \begin{pmatrix}\Delta x' & -c\Delta t'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x'\\ c\Delta t'\end{pmatrix} && (71)\\
&= (\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2 := (\Delta s)^2. && (72)
\end{aligned}$$

Outra maneira de se fazer isso é utilizar a transformação de Lorentz do referencial O' para o referencial O.

$$\begin{aligned}
(\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2 =& (\gamma\Delta x - \gamma\beta c\Delta t)^2 - (\gamma c\Delta t - \gamma\beta\Delta x)^2 && (73)\\
=& \gamma^2(\Delta x)^2 - 2\gamma^2\beta c\Delta x\Delta t + \gamma^2\beta^2(c\Delta t)^2\\
& -\gamma^2(c\Delta t)^2 + 2\gamma^2\beta c\Delta x\Delta t - \gamma^2\beta^2(\Delta x)^2 && (74)\\
=& (\Delta x)^2\gamma^2(1-\beta^2) - (c\Delta t)^2\gamma^2(1-\beta^2) && (75)\\
=& (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2. && (76)
\end{aligned}$$

Uma breve discussão sobre o resultado: essa relação é chamada de *invariante* e traz propriedades do fenômeno que ocorre. Veja que, para um objeto se propagando a uma velocidade $v < c$, $\Delta x' < c\Delta t'$ e portanto o invariante é *negativo* e chamado de *tipo-tempo*. Caso fosse positivo, seria chamado de *tipo-espaço* e, caso nulo, seria *tipo-luz*. Esse invariante define regiões do espaço de Minkowski onde os eventos podem ocorrer.



Na região em verde, ocorrem os eventos *tipo-tempo*, os que estamos acostumados. A linha azul é a linha pela qual a luz viaja (ou seja, é *tipo-luz*) e define o **cone de luz**. Na parte em vermelho, ocorrem eventos *tipo-espaço*. No Moysés isso é explicado com mais calma.

Para quem se interessa por notação indicial, o invariante pode ser substituído por

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \tag{77}$$
$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{78}$$

e demonstramos que ele independe do referencial ao observar que

$$dx'_\mu dx'^\mu = \Lambda^{\mu\sigma} dx_\sigma \Lambda_{\mu\alpha} dx^\alpha \tag{79}$$
$$= \underbrace{\Lambda^{\mu\sigma}\Lambda_{\mu\alpha}}_{\equiv\delta^\sigma_\alpha} dx_\sigma dx^\alpha \tag{80}$$
$$= dx_\alpha dx^\alpha. \tag{81}$$

Caso se interessem, recomendo a parte de relatividade do David Griffiths, Introduction to Elementary Particles como introdução ao assunto com tal notação.

Questão 9

Verifique se os resultados encontrados nas questões 3b e 6a satisfazem a igualdade derivada na questão 8.

Os resultados da questão 3b são

$$\Delta x = 1m \tag{82}$$
$$c\Delta t = 0m \tag{83}$$
$$\Delta x' = \frac{5}{3}m \tag{84}$$
$$c\Delta t' = \frac{4}{3}m. \tag{85}$$

Com isso, nosso invariante para o referencial do laboratório é trivialmente $(\Delta x)^2 = 1m^2$. Para o referencial da barra,

$$(\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2 = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} \tag{86}$$
$$= \frac{9}{9} = 1m^2. \tag{87}$$

Na questão 6a, temos

$$\Delta x' = 0 \tag{88}$$
$$c\Delta t' = c\tau_0 \tag{89}$$
$$\Delta x = \beta\gamma c\tau_0 \tag{90}$$
$$c\Delta t = \gamma c\tau_0. \tag{91}$$

O invariante no referencial O' é $-(c\Delta t')^2 = -c^2\tau_0^2$. Para o referencial do laboratório,

$$(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 = \beta^2\gamma^2c^2\tau_0^2 - \gamma^2c^2\tau_0^2 \tag{92}$$
$$= -c^2\tau_0^2 \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{\equiv 0} \tag{93}$$
$$= -c^2\tau_0^2. \tag{94}$$

Questão 10

A figura 3 mostra uma partícula que se move com velocidade $u' = (3/4)c$ em relação a um referencial móvel. Este último, por sua vez, se desloca com velocidade $v = (3/4)c$ em relação ao referencial de laboratório. Calcule a velocidade da partícula em relação ao referencial de laboratório. *Sugestão: Defina um segundo referencial móvel (x'' t'') cuja origem O'' está sobre a partícula. Escreva, em seguida, a transformação de Lorentz que relaciona x'' e t'' com x' e t'. Nesta última, substitua x' e t' pelo produto matricial que aparece na transformação de Lorentz entre o primeiro referencial móvel e o de laboratório. Efetue o produto matricial na igualdade resultante para relacionar x'' e t'' com x e t.*

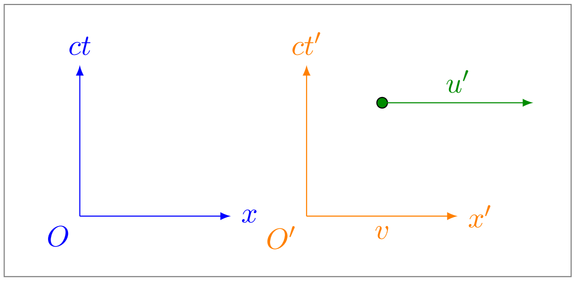


Figura 3: Questão 10.

Definindo o segundo referencial móvel (x'' t'') sobre a partícula, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma' \\ -\beta'\gamma' & \gamma' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}, \tag{95}$$

com $\beta' = u'/c$ e $\gamma' = (1 - \beta'^2)^{-1/2}$. Contudo, podemos escrever (x' ct') em função de (x ct) da forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{96}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma' \\ -\beta'\gamma' & \gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \tag{97}$$

com $\beta = v/c$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Com isso, podemos concluir que

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma'\gamma + \beta'\beta\gamma'\gamma & -\gamma'\beta\gamma - \beta'\gamma'\gamma \\ -\beta'\gamma'\gamma - \gamma'\beta\gamma & \gamma'\gamma + \beta'\beta\gamma'\gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Veja, contudo, que $\beta' = \beta = 3/4$. Isso nos diz que $\gamma' = \gamma = 4/\sqrt{7}$. Utilizando isso em nossa transformação, temos

$$\begin{pmatrix} x'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2(1+\beta^2) & -2\beta\gamma^2 \\ -2\beta\gamma^2 & \gamma^2(1+\beta^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16}{7}\frac{25}{16} & -2\frac{16}{7}\frac{3}{4} \\ -2\frac{16}{7}\frac{3}{4} & \frac{16}{7}\frac{25}{16} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{25}{7} & -\frac{24}{7} \\ -\frac{24}{7} & \frac{25}{7} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Essa relação nos diz que $\tilde{\gamma}$ da diferença dos referenciais O e O'' (e assim a velocidade que o observador no laboratório observa a partícula) é

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}} = \frac{25}{7} \tag{102}$$
$$\frac{1}{1-\tilde{\beta}^2} = \frac{625}{49} \tag{103}$$
$$1-\tilde{\beta}^2 = \frac{49}{625} \tag{104}$$
$$\tilde{\beta}^2 = \frac{625-49}{625} \tag{105}$$
$$= \frac{576}{625} \tag{106}$$
$$\tilde{\beta} = \frac{24}{25}. \tag{107}$$

Ou seja, no referencial O, vemos o objeto com $u = 24c/25$.

Podemos encontrar a lei de transformação de velocidades da seguinte maneira: a partícula se move com u' em O'. Ou seja, $\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u'$. A velocidade u que a partícula tem em O é

$$\frac{u}{c} = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\gamma\Delta x' + \beta\gamma c\Delta t'}{\gamma c\Delta t' + \beta\gamma\Delta x'}. \tag{108}$$

Colocando $c\Delta t'$ em evidência no denominador,

$$u = c\frac{\gamma\Delta x' + \gamma\beta c\Delta t'}{\gamma c\Delta t'(1+\beta\Delta x'/c\Delta t')} \tag{109}$$
$$= \frac{\Delta x' + \beta c\Delta t'}{\Delta t'(1+\beta\Delta x'/c\Delta t')} \tag{110}$$
$$= \frac{u' + \beta c}{(1+\beta u'/c)}. \tag{111}$$

Usando $\beta c = v$ (com v sendo a velocidade do referencial O' em relação a O), o resultado que temos é

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}. \tag{112}$$

Colocando $u' = v = 3c/4$,

$$u = \frac{3/4+3/4}{1+\frac{9c^2}{16c^2}}c \tag{113}$$
$$= \frac{3/2}{25/16}c \tag{114}$$
$$= \frac{3}{2}\frac{16}{25}c \tag{115}$$
$$= \frac{24}{25}c. \tag{116}$$