Exercícios - Cálculo IV - Aula 17 - Semana 14/12-18/12
Aplicação de Séries de Fourier: equação de Laplace

Uma das mais importantes de todas as equações diferenciais parciais que ocorrem na matemática aplicada é a equação de Laplace: em dimensão dois

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

e em três dimensões

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2}$$

Por exemplo, em um problema de condução de calor bidimensional, a temperatura $u(x, y, t)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$k(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{3}$$

onde k é a difusividade térmica. Se existe um estado estacionário, u é uma função de x e y apenas, e a derivada de u com respeito a t desaparece; neste caso, a equação (3) se reduz à (1). Equações (1) e (2) também ocorrem em outros ramos da física matemática. Na consideração de campos eletrostáticos, a função potencial elétrico em um meio dielétrico não contendo as cargas deve satisfazer a equação (1) ou (2), dependendo das dimensões envolvidas. Da mesma forma, a função potencial de uma partícula no espaço sob ação apenas de forças gravitacionais satisfaz as mesmas equações. Consequentemente, a equação de Laplace é frequentemente referida como equação potencial. Outro exemplo surge no estudo do movimento constante (independente do tempo), bidimensional, invíscido e irrotacional de um fluido incompressível, que se concentra em duas funções, conhecidas como função potencial de velocidade e função fluxo, ambas as quais satisfazem a equação (1). Em elasticidade, os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica é torcida são descritos em termos da chamada função de distorção, que também satisfaz a eq. (1).

Como não há dependência do tempo em nenhum dos problemas mencionados anteriormente, não há condições iniciais a serem satisfeitas pelas soluções da equação (1) ou (2). Elas devem, no entanto, satisfazer certas condições de contorno (ou de fronteira) na curva ou na superfície que delimita a região em que a equação diferencial deve ser resolvida. Como a equação de Laplace é de segunda ordem, é razoável esperar que sejam necessárias duas condições de contorno para determinar a solução completamente. Porém, este não é o caso. Lembre-se que no problema de condução de calor para a barra finita foi necessário prescrever uma condição em cada extremidade da barra, ou seja, uma condição em cada ponto da fronteira. Se generalizarmos esta observação para dimensão superior, então é natural prescrever uma condição na função u na fronteira da região em que uma solução da equação (1) ou (2) é procurada.

A condição mais comum que ocorre é quando o valor de u é especificado na fronteira. Em alguns problemas, em vez disso, é especificado o valor da derivada, ou taxa de mudança, de u na direção normal a fronteira. O problema de encontrar uma solução para a equação de Laplace que assume determinados valores na fronteira é conhecido como um problema de Dirichlet, em homenagem a P. G. L. Dirichlet. Em contraste, se os valores da derivada normal são prescritos na fronteira, o problema é dito ser um problema de Neumann, em homenagem a K. G. Neumann.

Fisicamente, é razoável esperar que os tipos de condições de fronteira sejam suficientes para determinar a solução completamente. Na verdade, é possível estabelecer a existência e a unicidade da solução da equação de Laplace sob as condições de fronteira mencionadas, desde a forma da fronteira e as funções aparecendo nas condições de contorno satisfazem certos requisitos. Contudo, as demosntrações desses fatos estão além do escopo da presente disciplina. Nossa única preocupação será resolver um problema típico por meio de separação de variáveis e séries de Fourier.

Problema de Dirichlet para um retângulo. Considere o problema matemático de determinar a função u satisfazendo a equação de Laplace (1),

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, e também satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 < x < a, \\ u(0,y) &= 0, \quad u(a,y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b, \end{aligned} \tag{4}$$

onde f é uma função dada em $0 \leq y \leq b$ (ver Figura 1).

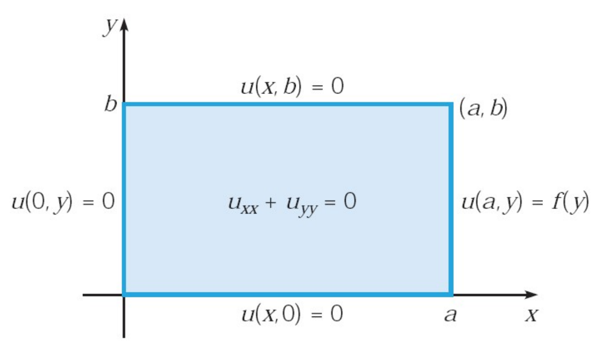

Figure 1: Problema de Dirichlet para um retângulo (crédito: E. C. Boyce, R. C. DiPrima)

Como foi apresentado pelo Prof. Éder na Aula 17, a solução deste problema é dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \qquad (x,y) \in [0,a] \times [0,b],$$

onde $c_n \sinh \frac{n\pi a}{b}$ é o coeficiente de Fourier da extensão ímpar $2b$-periódica de f, ou seja,

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy,$$

isto é,

$$c_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy.$$

Exemplo 1. Determine a solução da equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

no retângulo $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = 0, & u(x,\pi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0,y) = 0, & u(\pi,y) = \sin(3y), & 0 \leq y \leq b, \end{array} \tag{5}$$

Resolução. Para encontrar a solução, basta encontrar os coeficientes c_n, a saber,

$$c_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^\pi f(y) \sin ny\, dy = \begin{cases} \dfrac{1}{\sinh 3\pi}, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3. \end{cases}$$

Portanto, a solução desse problema de Dirichlet é

$$u(x,y) = \frac{\sinh 3x \sin 3y}{\sinh 3\pi}, \quad (x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi].$$

O gráfico da solução $u(x,y)$ é mostrado na Figura 2. Observe que os valores máximos e mínimos de $u(x,y)$ são atingidos em pontos da fronteira do retângulo $[0,\pi] \times [0,\pi]$. Isto não é uma caso particular dessa solução, mas é uma propriedade que toda solução da equação de Laplace em um comjunto aberto limitado possui, que é conhecida na literatura como o princípio do máximo para a equação de Laplace.

Exemplo 2. Determine a solução do problema de Dirichlet no retângulo para o caso que $a = 3$, $b = 2$ e

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Resolução. Calculando c_n, obtemos

$$cn = \frac{8 \sin \frac{n}{2}}{n^2 \pi^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}}.$$

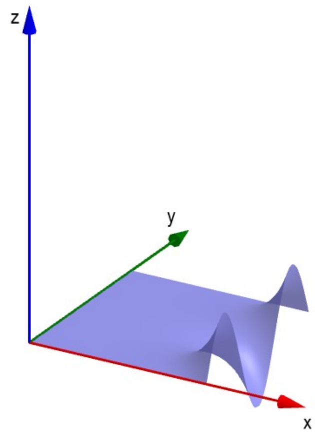

Figure 2: Problema de Dirichlet no retângulo $[0, \pi] \times [0, \pi]$

Então,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \sin \frac{n}{2}}{n^2 \pi^2 \sinh \frac{3n\pi}{2}} \sinh \frac{n\pi x}{3} \sin \frac{n\pi y}{2}, \quad (x, y) \in [0, 3] \times [0, 2].$$

Usando 20 termos na série, podemos representar o gráfico uma aproximação de u, conforme mostrado na Figura 3. Alternativamente, pode-se construir um gráfico mostrando curvas de nível dessa aproximação de u; A Figura 4 é esse gráfico, com um incremento de 0,1 entre curvas adjacentes.

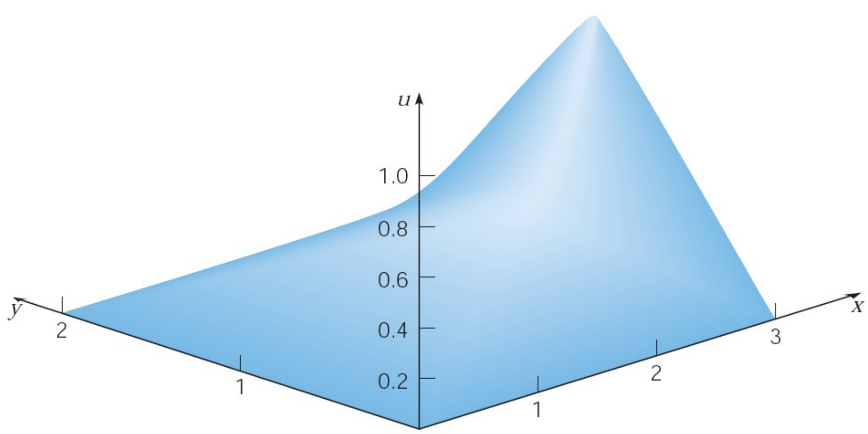

Figure 3: Gráfico da aproximação de u para o Example 2. (crédito: E. C. Boyce, R. C. DiPrima)

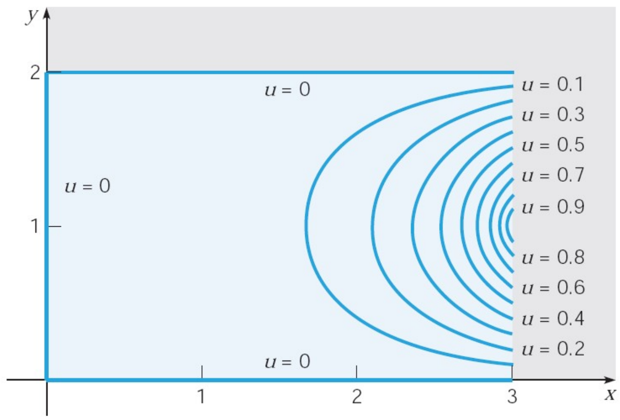

Figure 4: Gráficos das curvas de nível da aproximação de u para o Exemplo 2 (crédito: E. C. Boyce, R. C. DiPrima)

Exercício 1.

a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{aligned} &u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ &u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$