

MAP 0217 - 2020 1º Semestre - IME USP
Conexidade

1 Introdução

Aqui serão vistas as propriedades gerais de conjuntos conexos em espaços métricos e como funções contínuas lidam com eles. Uma seção especial é apresentada ao final de aplicações, com destaque para \mathbb{R}^p . Também este é um tópico muito *topológico* da disciplina.

O material estudado é coberto nas seções 12 e 22 do livro de Bartle.

O material apresentado aqui tem uma abordagem um pouco diferente da do texto por enfatizar a relação muito grande que existe entre conjuntos conexos e conjuntos em que funções contínuas obedecem a *um certo teorema do valor intermediário* (veja o fato 3, o item (iii) do fato 5 e a discussão que segue o fato 6).

Dessa maneira o leitor pode ter duas visões de conexidade e das técnicas básicas que envolvem este tema tão importante.

2 Espaços Conexos

2.1 Diálogo instrutivo... ou não?

Um aluno - *Professor, não entendi direito esse negócio de conexo, pode mostrar um exemplo de algo que não é conexo?*

O professor - *Claro!* E ao dizer isso, o mestre vai à lousa e desenha duas elipses bem distantes uma da outra, aponta para o desenho e completa... *Aqui está, UM conjunto que não é conexo.*

O mesmo aluno - *Isso não vale, o exemplo que eu pedi era de UM conjunto que não fosse conexo, isso aí são DOIS conjuntos!*

Pois é...

2.2 Definições básicas

Nesta nota (M, d) e (N, \tilde{d}) serão espaços métricos que serão nomeados apenas como M e N , fica subentendido que as métricas d e \tilde{d} estão fixas.

Definição 1 *Seja $A \subset M$, uma **cisão** de A é, por definição, um par (U, V) de subconjuntos abertos de M tais que:*

$$(i) (A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$$

$$(ii) (A \cap U) \cup (A \cap V) = A$$

Observação 1 Se $A = M$ então $A \cap U = U$ e $A \cap V = V$, assim uma **cisão de um espaço métrico** é um par de (U, V) de subconjuntos *abertos disjuntos* desse espaço cuja reunião é o espaço todo.

Observação 2 Claro que, para todo subconjunto A de M , o par (U, V) em que $U = M$ e $V = \emptyset$ é uma cisão de A , nesse caso $A \cap U = A$ e $A \cap V = \emptyset$. Uma cisão desse tipo, em que um dos conjuntos $A \cap U$ ou $A \cap V$ é vazio (e o outro é A) é chamada **cisão trivial**.

Exemplo 1 CONSIDERE O ESPAÇO MÉTRICO \mathbb{Q} DOS NÚMEROS RACIONAIS COM A DISTÂNCIA USUAL, $d(x, y) = |x - y|$.

SE $U = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\}$ E $V = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} = \mathbb{Q} \setminus U$ ENTÃO (U, V) É UMA CISÃO NÃO TRIVIAL DE \mathbb{Q} .

PARA VER ISTO, NOTE QUE U E V SÃO CONJUNTOS ABERTOS EM \mathbb{Q} E USE A OBSERVAÇÃO 1.

Exercício 1 *Mostre que no exemplo anterior U e V são de fato abertos em \mathbb{Q} .*

Note que no exemplo visto, como U e V são abertos e $V = \mathbb{Q} \setminus U$ tem-se que U e V são também fechados. Isso é um fato geral.

Fato 1 *O par (U, V) é uma cisão do espaço métrico M se, e só se, U e V são subconjuntos de M abertos e fechados, com $V = M \setminus U$.*

Demonstração: Consequência direta da observação 1 e da definição de fechado. ■

Uma propriedade que segue de pronto desta “trivialidade” é:

Fato 2 *Um espaço métrico M tem uma cisão não trivial se, e só se, existe um subconjunto U de M , com $\emptyset \neq U \neq M$, que é aberto e fechado em M .*

Exercício 2 *Demonstre o fato 2.*

Uma última observação simples mas útil.

Fato 3 O espaço métrico M admite uma cisão não trivial se, e só se, existe uma função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Im(f) = \{0, 1\}$.

Demonstração: Admita que (U, V) é uma cisão não trivial de M .

Então, pelo fato 2, U e V são abertos disjuntos, diferentes do vazio, tais que $M = U \cup V$.

Considere então $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \in U$, e $f(x) = 0$ para todo $x \in V$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto, então:

- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \emptyset$ então $f^{-1}(\Omega) = \emptyset$.
- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \{0\}$ então $f^{-1}(\Omega) = V$.
- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \{1\}$ então $f^{-1}(\Omega) = U$.
- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \{0, 1\}$ então $f^{-1}(\Omega) = M$.

Como U e V são abertos, fica provado que, para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$ tem-se que $f^{-1}(\Omega)$ é um aberto de M e isso mostra de pronto a continuidade de f .

Para provar a recíproca suponha que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $Im(f) = \{0, 1\}$.

Considere $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $J = (\frac{1}{2}, 2)$ e defina $U = f^{-1}(I)$ e $V = f^{-1}(J)$.

Como f é contínua e os conjuntos I e J são abertos disjuntos segue-se que U e V são subconjuntos de M também abertos disjuntos de M , com $U \cup V = M$ pois $Im(f) \subset I \cup J$.

Além disso $U \neq \emptyset$, pois $0 \in I \cap Im(f)$, e $V \neq \emptyset$, pois $1 \in I \cap Im(f)$.

Portanto (U, V) é uma cisão não trivial de M . ■

Um exemplo muito importante é visto na forma de proposição. No texto de Baetle é o teorema 12.3 (com uma linguagem um pouco diferente, mas é este resultado), a demonstração colocada aqui é levemente diferente, mas uma leitura atenta de ambas mostra que há um paralelo entre elas.

Fato 4 O intervalo $I = [0, 1]$ de \mathbb{R} só admite cisões triviais.

Demonstração: Suponha por absurdo que isso não é verdade.

Note que, conforme se viu em aula anterior, com a distância habitual de \mathbb{R} , o intervalo real I torna-se um espaço métrico e no qual abertos são a intersecção de I com abertos de \mathbb{R} .

Assim, pela definição de cisão, claro que é equivalente afirmar que o subconjunto $[0, 1]$ do espaço métrico \mathbb{R} tem uma cisão não trivial e dizer o espaço métrico $[0, 1]$ com a distância usual tem uma cisão não trivial.

Portanto, se existe uma cisão não trivial de $[0, 1]$, o fato 3 mostra que existe uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é o conjunto $\{0, 1\}$.

Mas, pelo teorema do valor intermediário, uma função assim não pode existir. ■

Claro que esta demonstração mostra que *todo intervalo* J de \mathbb{R} só admite a cisão trivial (seja J fechado ou não).

2.3 Conexidade em Espaços Métricos

Definição 2 Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se, por definição, **conexo** em M se admite apenas cisões triviais.

Se A admite uma cisão não trivial ele é chamado, por definição, **desconexo** ou **não conexo**.

Com esse conceito definido, é imediato ver que o fato 4 pode ser com o enunciado usual, *todo intervalo é um subconjunto conexo de \mathbb{R}* .

Perceba no entanto que, como se viu no exemplo 1 o conjunto dos números racionais não é conexo¹.

A discussão feita na subseção 2.2 deixa claro o seguinte resultado.

Fato 5 Seja (M, d) um espaço métrico. São equivalentes:

- (i) M é conexo.
- (ii) Os únicos subconjuntos de M que são abertos e fechados em M são o conjunto vazio e M .
- (iii) Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então sua imagem é um intervalo.

Demonstração: • (i) \implies (ii): Decorre de modo imediato do fato 2.

- (ii) \implies (iii): Suponha por absurdo que vale (ii) e existe uma função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem não é um intervalo.

Então existem reais $a < b$ na imagem de f e um ponto c entre a e b que não pertence à imagem de f .

Considere $I = (-\infty, c)$, $J = (c, +\infty)$ e defina $U = f^{-1}(I)$ e $V = f^{-1}(J)$.

Claro que $Im(f) \subset I \cup J$, pois $c \notin Im(f)$, portanto $U \cup V = M$. Além disso, como $I \cap J = \emptyset$ segue-se que $U \cap V = \emptyset$. Estas observações

¹Na verdade, a propriedade de \mathbb{R} ser conexo é equivalente ao axioma do supremo.

mostram que $V = M \setminus U$. Note ainda que, como $a \in I$ e $b \in J$, claro que nem U e nem V são vazios, e nenhum deles é M (pois $V = M \setminus U$). Agora veja que, como I e J são abertos de \mathbb{R} , pelo fato de f ser contínua segue-se que U e V são abertos de M .

Portanto U e V são abertos e fechados em M e nenhum deles é M ou é vazio. Isso contraria a propriedade (ii) e mostra esta implicação.

- (iii) \implies (i): Esta implicação é equivalente a dizer que *se M não é conexo existe uma função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem não é um intervalo*². Isso foi provado no fato 3. ■

Pode-se reparafrasear este resultado para apresentar caracterizações de conjuntos desconexos. Nesse caso ele toma a seguinte forma:

Fato 6 *Seja (M, d) um espaço métrico. São equivalentes:*

- (i) *M não é conexo.*
- (ii) *Existe um subconjunto U de M , $\emptyset \neq U \neq M$ que é aberto e fechado em M .*
- (iii) *Existe uma função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é $\{0, 1\}$.*

Exercício 3 *Demonstre o fato 6.*

Estes resultados estabelecem uma primeira, e muito importante, relação entre conexidade e continuidade.

Diz-se que o espaço métrico M tem a propriedade do valor intermediário se a seguinte propriedade for verdadeira:

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, os reais a e b estão na imagem de f e c está entre a e b , então existe $x \in M$ tal que $f(x) = c$.

Com esse jargão note que a propriedade (iii) do fato 5 afirma que M é conexo se, e só se tiver a propriedade do valor intermediário.

Os fatos 5 e 6 caracterizam a espaços métricos conexos ou desconexos, mas é simples ver que eles podem ser adaptados sem dificuldades para caracterizar subconjuntos conexos (ou desconexos) de espaços métricos.

Para isso lembre que se (M, d) é um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$, então a restrição de d a $A \times A$ define uma distância em A e um subconjunto

² $(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$

X de A é aberto nesse espaço $(A, d|_{A \times A})$ se, e só se, existe um subconjunto $U \subset M$, aberto em M tal que $X = A \cap U$.

Com essa noção é imediato ver que o subconjunto A do espaço métrico M é conexo em M se, e só se, o espaço $(A, d|_{A \times A})$ é conexo (demonstre esta afirmação).

Desse modo é simples demonstrar as seguinte proposições.

Fato 7 *Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. São equivalentes:*

- (i) *A é conexo em M .*
- (ii) *Se U é um aberto de M e $A \cap U$ é fechado em $(A, d|_{A \times A})$ então $A \cap U = A$ ou $A \cap U = \emptyset$.*
- (iii) *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então sua imagem é um intervalo.*

Fato 8 *Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. São equivalentes:*

- (i) *A é desconexo em M .*
- (ii) *Existe $U \subset M$ que é aberto em M tal que $\emptyset \neq A \cap U \neq A$ e $A \cap U$ é fechado em $(A, d|_{A \times A})$.*
- (iii) *Existe $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua imagem é o conjunto $\{0, 1\}$.*

Exercício 4 *Demonstre os fatos 7 e 8.*

Para encerrar esta seção, alguns exemplos.

Exemplo 2 CONSIDERE UM INTERVALO NÃO DEGENERADO $I \subset \mathbb{R}$ E UMA FUNÇÃO $f : I \rightarrow M$ CONTÍNUA. A IMAGEM DE f É UM SUBCONJUNTO CONEXO DE M .

Para provar essa afirmação, suponha por absurdo que $Im(f)$ é um subconjunto desconexo de M . Então, pelo fato 8, existe uma função contínua $g : Im(f) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Im(g) = \{0, 1\}$. Note que então, existem u e v na imagem de f tais que $g(u) = 0$ e $g(v) = 1$.

Então $h = g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $Im(h) \subset Im(g) = \{0, 1\}$.

Como u e v tomados acima são pontos de $Im(f)$ existem t_1 e t_2 em I tais que $f(t_1) = u$ e $f(t_2) = v$. Portanto $h(t_1) = 0$ e $h(t_2) = 1$, o que mostra que $Im(h) = \{0, 1\}$. Como h é uma função contínua de $[0, 1]$ em \mathbb{R} isto viola o teorema do valor intermediário e mostra que a hipótese de absurdo não se sustenta e encerra o assunto!

Exemplo 3 SEJAM M UM ESPAÇO MÉTRICO E $A \subset M$ UM SUBCONJUNTO CONEXO DE M . ENTÃO, SE B É UM SUBCONJUNTO DA FRONTEIRA DE A TEM-SE QUE $X = A \cup B$ É CONEXO.

Em outras palavras, não se pode separar A da sua fronteira com conjuntos abertos!

Os detalhes da demonstração da afirmação feita no exemplo 3 são deixadas ao leitor como exercício, aqui apresenta-se um roteiro da prova.

Suponha por absurdo que $X = A \cup B$ não é conexo. Então pelo fato 8 existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua cuja imagem é $\{0, 1\}$

Como A é conexo use o fato 7 e mostre que a restrição $f|_A$ de f a A deve ser constante (justifique esta afirmação).

Então, sem perda de generalidade, admita que $f(x) = 0$, para todo $x \in A$.

Como $Im(f) = \{0, 1\}$, existe um ponto $u \in B \setminus A$ tal que $f(u) = 1$. Prove que isto não pode acontecer (use que isto contraria o fato de f ser contínua em u , constantemente nula em A e u estar na fronteira de A , sugestão por sequências é imediato ver isso, mas pela definição de continuidade por vizinhanças também é simples).

Junte agora os dois exemplos anteriores e veja o seguinte exemplo interessante.

Exemplo 4 O CONJUNTO $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(0, 0)\}$ É CONEXO EM \mathbb{R}^2 .

De fato, $f(x) = (x, \sin \frac{1}{x}), x > 0$, é contínua em $(0, +\infty)$, portanto, pelo exemplo 2, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$ é um subconjunto conexo de \mathbb{R}^2 . Como $(0, 0)$ está na fronteira desse conjunto (certo?) o exemplo 3 mostra que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo em \mathbb{R}^2 .

Aliás, como a fronteira de G é o segmento de reta $F = \{(0, y), -1 \leq y \leq 1\}$ (prove isto como exercício), se $B \subset F$, tem-se, pelo resultado do exemplo 3, que $G \cup F$ é conexo.

Este exemplo tem algumas peculiaridades que serão estudadas no futuro.

3 Preservação da Conexidade

Lembre que M e N são espaços métricos.

Nesta seção vai-se mostrar que funções contínuas preservam conjuntos conexos, ou seja a imagem de um conjunto conexo do domínio por uma função contínua é um conjunto conexo no contradomínio.

Esse resultado é, no caso de $M = \mathbb{R}^p$ e $N = \mathbb{R}^q$, o teorema 22.3 do livro de Bartle, a demonstração feita aqui é, como já comentado, diferente da apresentada naquele texto, ambas são simples, e dessa maneira o leitor fica com duas formas distintas de enxergar a questão. Note-se que, embora o texto de Barte, enuncie o resultado para $M = \mathbb{R}^p$ e $N = \mathbb{R}^q$, a demonstração ali apresentada do teorema 22.3 vale para o caso de espaços métricos quaisquer.

A demonstração apresentada aqui é, na verdade, a mesma vista na argumentação feita para justificar as afirmações do exemplo 2, apenas adaptada a uma situação mais geral.

Fato 9 *Se $f : M \rightarrow N$ é contínua e A é um subconjunto conexo de M então $f(A)$ é um subconjunto conexo de N .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $f(A)$ não é conexo.

Então, pelo fato 8, existe $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua cuja imagem é $\{0, 1\}$. Então existem u e v em $f(A)$ tais que $g(u) = 0$ e $g(v) = 1$.

Considere a restrição $f|_A$ de f a A , que evidentemente é contínua em todo A .

Então $h = g \circ f|_A$ é uma função contínua de A em \mathbb{R} com imagem contida em $Im(g) = \{0, 1\}$. Como u e v estão em $f(A)$ existem x_1 e x_2 em A tais que $f(x_1) = u$ e $f(x_2) = v$. Portanto $Im(h) = \{0, 1\}$.

Isso contraria o fato 7 pois, como A é conexo, a imagem de h deve ser um intervalo. ■

4 Conexidade em \mathbb{R}^p

Nesta parte analisa-se a questão de conexidade em \mathbb{R}^p . Lembre que considera-se em \mathbb{R}^p a distância usual dada pela norma euclídeana.

Uma observação preliminar que será útil é a seguinte.

Se u e v são pontos de \mathbb{R}^p o segmento de reta que une u a v é o conjunto $S_{uv} = \{x \in \mathbb{R}^p : x = u + t(v - u), 0 \leq t \leq 1\}$. Note que a função $\gamma_{uv} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\gamma_{uv}(t) = u + t(v - u)$ é contínua.

Pelo fato 4, $[0, 1]$ é um subconjunto conexo de \mathbb{R} , assim decorre da preservação de conexidade por funções contínuas que S_{uv} é conexo.

Fato 10 *O espaço métrico \mathbb{R}^p é conexo.*

Demonstração: Se, por absurdo, assim não fosse existira uma função contínua $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ com imagem $\{0, 1\}$.

Tome pontos u e v em \mathbb{R}^p tais que $f(u) = 0$ e $f(v) = 1$, e considere a restrição de f ao segmento de reta S_{uv} .

Essa restrição é contínua e, pela construção feita, é imediato que a imagem dessa restrição é $\{0, 1\}$.

Como S_{uv} é conexo isso contraria, mais uma vez, o item (iii) do fato 7 (essa imagem deveria ser um intervalo) e essa contradição encerra a demonstração. ■

Uma consequência direta deste resultado, que segue do item (ii) do fato 5, é que os únicos subconjuntos de \mathbb{R}^p que são abertos e fechados são \mathbb{R}^p e o vazio.

4.1 Conexos por caminhos e abertos conexos em \mathbb{R}^p

Um tipo especial de conjunto conexo é aquele em que dois pontos quaisquer podem ser unidos por uma curva contínua.

Esse conceito une as ideias de conexidade e convexidade (lembre que um conjunto convexo é aquele que contem os segmentos de reta determinados por dois quaisquer de seus pontos).

Uma curva contínua em $X \subset \mathbb{R}^p$ é uma função contínua $\varphi : [a, b] \rightarrow X$.

No exemplo 2 estabeleceu-se que a imagem de uma curva contínua é um subconjunto conexo de \mathbb{R}^p (e de X).

Definição 3 Um subconjunto A de \mathbb{R}^p é dito **conexo por caminhos** se, e só se, por definição, para todo par de pontos $(u, v) \in A \times A$ existe uma curva contínua em A que use u a v , ou seja, existe $\varphi_{uv} : [a, b] \rightarrow A$ contínua tal que $\varphi_{uv}(a) = u$ e $\varphi_{uv}(b) = v$.

Claro que conjuntos convexos $A \subset \mathbb{R}^p$ são conexos por caminhos.

Exemplo 5 O CONJUNTO $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ NÃO É CONVEXO MAS É CONEXO POR CAMINHOS (DEMONSTRE COMO EXERCÍCIO).

Exemplo 6 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$ É CONEXO POR CAMINHOS EMBORA NÃO SEJA CONVEXO (PROVE ESTAS AFIRMAÇÕES).

Fato 11 Se $A \subset \mathbb{R}^p$ é conexo por caminhos então A é conexo.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que isso não ocorre. Então existe uma função contínua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é $\{0, 1\}$. Tome pontos u

e v em A tais que $f(u) = 0$ e $f(v) = 1$ e considere uma curva contínua $\varphi_{uv} : [a, b] \rightarrow A$ tal que $\varphi_{uv}(a) = u$ e $\varphi_{uv}(b) = v$ (existe uma curva assim por que A é conexo por caminhos).

Então $h = f \circ \varphi_{uv}$ é uma função contínua do intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R} cuja imagem está contida em $Im(f) = \{0, 1\}$. Como, por construção, $h(a) = 0$ e $h(b) = 1$, vem que $Im(h) = \{0, 1\}$, e isto contraria o teorema do valor intermediário e essa contradição encerra a demonstração. ■

Uma observação interessante é que a *recíproca deste resultado NÃO É VERDADEIRA*, conforme se vê a seguir.

No exemplo 4 viu-se que $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo em \mathbb{R}^2 .

É simples que H não é conexo por caminhos, basta considerar os pontos $u = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ e $v = (0, 0)$ que estão em H e ver que nenhuma curva contínua que fique em H consegue ligar u a v (esta afirmação segue-se do fato de $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, se $x > 0$ e $g(0) = 0$ ser desconítua em $0+$).

Agora vai-se ver que para subconjuntos *abertos* de \mathbb{R}^p a recíproca do fato 11 é verdadeira.

Na prova dessa propriedade será útil usar a noção de *concatenação de curvas*.

Suponha que $A \subset \mathbb{R}^p$ e $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow A$, $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow A$ são curvas contínuas em A tais que $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$, ou seja, a curva φ_2 “começa” onde φ_1 “termina”. Nesse caso pode-se construir uma curva contínua em A ligando os pontos $\varphi_1(a)$ e $\varphi_2(d)$ juntando as curvas φ_1 e φ_2 . Tecnicamente isso é considerando $\delta = d - c$ e definindo a curva $\varphi : [a, b + \delta] \rightarrow A$ por $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, se $t \in [a, b]$, e $\varphi(t) = \varphi_2(c + (t - b))$, se $t \in [b, b + \delta]$. A continuidade de φ é imediata visto que φ_1 e φ_2 são contínuas e $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$. Essa curva φ chama-se, por definição, *concatenação* de φ_1 e φ_2 .

Fato 12 *Seja $U \subset \mathbb{R}^p$ um aberto. Então U é conexo se, e só se, U é conexo por caminhos.*

Demonstração: Já se mostrou no fato 11 que se U for conexo por caminhos então U é conexo.

Para a recíproca suponha que $U \subset \mathbb{R}^p$ é um aberto conexo.

Se $U = \emptyset$ claro que U é conexo por caminhos.

Se $U \neq \emptyset$ tome $\bar{x} \in U$ e defina

$$W = \{y \in U : \text{existe uma curva contínua } \varphi_{\bar{x}y} : [a, b] \rightarrow U \text{ que une } \bar{x} \text{ a } y\}$$

e $V = U \setminus W$, ou seja V é o conjunto dos pontos de U que não pode ser ligado a \bar{x} por uma curva contínua.

O ponto essencial da demonstração será provar que W e V são subconjuntos abertos de \mathbb{R}^p , que é feito a seguir.

- **W é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^p :** De fato tome $y \in W$, então existe uma curva contínua $\varphi_{\bar{x}y} : [a, b] \rightarrow U$ tal que $\varphi_{\bar{x}y}(a) = \bar{x}$ e $\varphi_{\bar{x}y}(b) = y$.

Além disso, por U ser aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Note agora que $B(y, \varepsilon)$ é convexo [prove isto como exercício], portanto se $z \in B(y, \varepsilon)$ o segmento de reta que une y a z , $\gamma_{yz}(t) = y + t(z - y)$, $0 \leq t \leq 1$ fica contido em $B(y, \varepsilon) \subset U$.

Note que $\varphi_{\bar{x}y}(b) = \gamma_{yz}(0) = y$, assim pode-se fazer a concatenação de $\varphi_{\bar{x}y}$ e γ_{yz} e obter uma curva contínua em U que une \bar{x} a z . Portanto $z \in U$, o que mostra que $B(y, \varepsilon) \subset W$ e fica provado que W é aberto.

- **$V = U \setminus W$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^p :** A demonstração é muito parecida com a anterior. Tome $y \in V$, então *não existe curva contínua em U que liga \bar{x} a y .*

Como U é aberto, existe $\rho > 0$ tal que $B(y, \rho) \subset U$.

Agora vai-se provar que $B(y, \rho) \subset V$. De fato, se, por absurdo, existisse w nessa bola que não está em V . Como $B(y, \rho) \subset U$ então $w \in U \setminus V = W$.

Portanto existiria uma curva contínua em U , $\varphi_{\bar{x}w} : [a, b] \rightarrow U$, com $\varphi_{\bar{x}w}(a) = \bar{x}$ e $\varphi_{\bar{x}w}(b) = w$.

Então, ao concatenar $\varphi_{\bar{x}w}$ com o segmento de reta $\gamma_{wy}(t) = w + t(y - w)$, $t \in [0, 1]$, de extremidades w e y (que fica contido no convexo $B(y, \rho) \subset U$), obter-se-ia uma curva contínua em U que ligaria \bar{x} a y , o que contraria o fato de $y \in V$.

Assim $B(y, \rho) \subset V$ e fica provado que V é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^p .

Assim W e V são abertos de \mathbb{R}^p , ambos contidos em U , com interseção vazia e $W \cup V = U$, portanto o par (W, V) é uma cisão de U . Como U é conexo, resulta destas considerações que um dos conjuntos W e V deve ser vazio e o outro será igual a U .

Como é claro que $\bar{x} \in W$, tem-se $W = U$.

Então *todos os pontos de U podem ser ligados a \bar{x} por uma curva contínua em U* e isto implica de pronto que U é conexo por caminhos. ■

Na verdade poderia provar-se um resultado ligeiramente mais forte que este, *Um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^p é conexo se, e só se U for **conexo por poligonais***, isto é, em \mathbb{R}^p um aberto U é conexo se, e só se, para todo par de pontos $(u, v) \in U \times U$ existe uma poligonal que une u a v contida em U .

Este é o resultado enunciado e provado no livro de Bartle no teorema 12.7.

A demonstração tem as mesmas ideias vistas na prova do fato 12 com alguns detalhes técnicos a mais.

O leitor fica convidado a ver essa prova no livro texto.

4.1.1 Conexos em \mathbb{R}

Viu-se no fato 4 que intervalos são subconjuntos conexos de \mathbb{R} , agora vai-se mostrar que estes são os únicos subconjuntos conexos de \mathbb{R} .

Fato 13 *Um subconjunto I de \mathbb{R} é conexo se, e só se, I é um intervalo.*

Demonstração: Já se viu que intervalos são conexos.

Claro que para provar a recíproca é suficiente mostrar que se I não for um intervalo então I não é conexo.

Suponha então que $I \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo então existem reais $a < b$ em I e c entre a e b tais que $c \notin I$.

Então os abertos da reta, $U = (-\infty, c)$ e $V = (c, +\infty)$, são tais que:

- (i) $W \cap V = \emptyset$
- (ii) $(U \cap I) \cup (V \cap I) = I$ (pois $c \notin I$)
- (iii) $a \in U \cap I$ e $b \in V \cap I$.

Portanto o par (U, V) é uma cisão não trivial de I , o que mostra que I não é conexo. ■