Compacidade e Funções Contínuas*

IME USP

MAP 0217 - 2020
Devia ser primeiro semestre

Resumo

Pretende-se aqui fornecer apoio para a compreensão da leitura do livro texto da disciplina no tópicos de compacidade (seção 11) e sua relação com funções contínuas (seção 22). No livro faz-se tudo em $\mathbb{R}^p$, aqui as seções 1 e 2 tratam respectivamente de subconjuntos compactos e sequencialmente compactos em espaços métricos em geral. A propriedades básicas de funções contínuas em compactos aparecem na seção 3 também no contexto de espaços métricos, nesse ponto introduz-se a noção de continuidade uniforme (no livro texto está na parte inicial da seção 23). A seguir o caso de $\mathbb{R}^p$ é descrito na seção 2.2.

1 Definições Básicas e Propriedades Iniciais

Nestas notas de aula (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ serão dois espaços métricos que, como de hábito serão denotados apenas por M e N respectivamente, uma vez que as métricas d e $\widetilde{d}$ estão fixadas.

Definição 1 *Seja X um subconjunto do espaço métrico M, uma cobertura aberta de X é, por definição, uma coleção $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de subconjuntos abertos de M tal que $X \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}$.*

Se $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ e $\widetilde{\mathcal{G}} = (U_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}}$ for uma cobertura aberta de X, diz–se que $\widetilde{\mathcal{G}}$ é uma subcobertura de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1 Se $x_0 \in M$ e, para $n \in \mathbb{N}$, $B_n = B_n(x_0)$ então $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de M. Claro que $(B_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subcobertura desta.

*Culpa destas notas existirem? A pandemia do Covid-19...

Questão 1 Considere em $\mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{Z}$, o intervalo aberto $I_n = (n-1, n+1)$ e seja $\mathcal{G} = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Prove que:

(i) $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$.

(ii) Se $\widetilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$ e $\widetilde{\mathcal{G}} \neq \mathcal{G}$ então $\widetilde{\mathcal{G}}$ **não** é uma cobertura de $\mathbb{R}$ (em outras palavras, $\mathcal{G}$ não tem subcobertura própria, i.e. diferente dela mesmo).

Exemplo 2 Considere $X =]0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $I_n = (\frac{1}{n}, 17)$, com $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ é simples ver que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X e que $(I_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subcobertura dela.

Exemplo 3 Seja $M = \ell_\infty(\mathbb{N})$ o conjunto das sequências (x_n) limitadas de reais, com a distância entre $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ definida como $d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$ e considere X o conjunto formado pelas sequências $e^1,\ e^2, \ldots, e^k, \ldots$ em que $e^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n^k = \delta_{kn}$.

Note que, se $k \neq s$ então $d(e^k, e^s) = 1$. Portanto todos os pontos de X são isolados o que mostra de pronto que X é um subconjunto fechado de M. Além disso, todos os e^k estão na bola aberta de centro e^1 e raio 2, ou seja $X \subset B_2(e^1)$, o que mostra ser X um conjunto limitado. Por outro lado para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se $B_{\frac{1}{2}}(e^k) \cap X = \{e^k\}$.

Isso mostra que $\mathcal{G} = (B_{\frac{1}{2}}(e^k))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X e, ademais, $\mathcal{G}$ **não possui nenhuma subcobertura própria**.

A questão a seguir é interessante embora neste ponto da disciplina possa ser um pouco difícil, ou pelo menos, parecer difícil.

Questão 2 Considere $(r_n, n \in \mathbb{N})$ uma enumeração de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, isto é, tome uma função bijetora $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ e faça $r_n = \varphi(n)$. Seja $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $I_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$.

Prove que se $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ então $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma cobertura aberta de $[0, 1]$

Definição 2 *Um subconjunto X do espaço métrico M é compacto se, por definição, toda cobertura aberta $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha_{\alpha\in\mathcal{A}}}$ tem uma subcobertura finita,*

isto é, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ *em* $\mathcal{A}$ *tais que* $X \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$.

O primeiro exemplo de compacidade vem na forma de um exercício muito simples,

Questão 3 Mostre que todo subconjunto finito do espaço métrico M é compacto.

De fato esse exemplo é muito simples, agora veja os seguintes exemplos de conjuntos que não são compactos.

Exemplo 4 A questão 1 mostra que $\mathbb{R}$ não é um espaço métrico compacto, pois exibe uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ que não tem subcobertura finita (na verdade, mostrou-se ali uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$, infinita, que não tem subcobertura própria). Mais adiante esta conclusão será obtida por um caminho diferente (veja o fato 2).

Exemplo 5 O intervalo $]0, 1]$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não é compacto.

Lembre que, no exemplo 2 mostrou-se a cobertura aberta desse intervalo $\mathcal{G} = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que $I_n = (\frac{1}{n}, 17)$. Agora será provado que $\mathcal{G}$ não tem subcobertura finita.

Para isso note que, se n_1 e n_2 são naturais com $n_1 < n_2$ então $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{n_1}$, portanto $I_{n_1} \subset I_{n_2}$.

Tome então um numero finito de naturais $n_1 < n_2 < \cdots < n_\ell$, claro que, se $1 \leq j < k \leq \ell$ então $I_{n_j} \subset I_{n_k}$, portanto $\bigcup_{j=1}^{\ell} I_{n_j} = I_{n_\ell} = (\frac{1}{n_\ell}, 17)$. Assim, $(I_{n_j})_{1\leq j\leq \ell}$ **não** é uma subcobertura de $\mathcal{G}$ e fica provado que $]0, 1]$ não é um subconjunto compacto.

Questão 4 Prove que $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ não é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Sugestão: Considere $\mathcal{G}$ usada no exemplo 5 (Obs. Há outros modos de resolver esta questão, por exemplo, pode usar-se o fato 3).

Apesar do resultado expresso na questão 4 note o exemplo a seguir:

Exemplo 6 Seja (x_n) uma sequência convergente em M para $\overline{x}$. O conjunto $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{x}\}$ é compacto.

De fato, seja $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de X. Como $\overline{x} \in X$ existe $\overline{\alpha} \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{x} \in U_{\overline{\alpha}}$.

Ademais, uma vez que $U_{\overline{\alpha}}$ é aberto e $x_n \to \overline{x}$ existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_{\overline{\alpha}}$, para todo $n > \overline{n}$.

Então $X \setminus U_{\overline{\alpha}} \subset \{x_1, \ldots, x_{\overline{n}}\}$, portanto, basta escolher, para cada $1 \leq j \leq \overline{n}$, um $\alpha_j \in \mathcal{A}$ tal que $x_j \in U_{\alpha_j}$, e observar que $X \subset U_{\overline{\alpha}} \bigcup_{j=1}^{\overline{n}} U_{\alpha_j}$.

O exemplo a seguir é de qualidade diferente, mais profundo, ele pode ser obtido como aplicação direta do Teorema de Heine-Borel (veja o fato 11), mas por questões didáticas, será destacado de maneira especial, com uma abordagem direta.

Exemplo 7 O intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ é compacto.[1]

Para ver isto considere $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de $[0, 1]$. Claro que então $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de $[0, x]$, para todo $x \in [0, 1]$.

Agora defina

$$A = \{x \in [0, 1] \colon \mathcal{G} \text{ tem uma subcobertura finita de } [0, x]\}.$$

É imediato ver que $0 \in A$ e 1 é um majorante de A, então, pela completeza da reta, A tem supremo. Seja $\overline{x} = \sup A$. Das observações anteriores tem-se já que $0 \leq \overline{x} \leq 1$.

Agora vão ser demonstradas duas coisas:

- $\overline{x} \in A$;
- $\overline{x} = 1$.

Claro que disto resultará de pronto que $1 \in A$ e a compacidade de $[0, 1]$ ficará provada.

Prova que $\overline{x} \in A$

Se $\overline{x} = 0$ isto já foi destacado, resta analisar a situação em que $0 < \overline{x} \leq 1$.

Como $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de $[0, 1]$, tem-se que $\overline{x} \in U_{\overline{\alpha}}$ para algum $\overline{\alpha} \in \mathcal{A}$ e $U_{\overline{\alpha}}$ é aberto, portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \subset U_{\overline{\alpha}}$. Claro que pode-se escolher um $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante para $\overline{x} - \varepsilon > 0$.

[1] Claro que esta demonstrção também prova, *mutatis mutandis*, que todo intervalo fechado e limitado $[a, b]$ é um subconjunto compacto da reta.

A definição de supremo mostra que existe $x_\varepsilon \in]\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}] \cap A$. Portanto existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ em $\mathcal{A}$ tais que $[0, x_\varepsilon] \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$. Como $]\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}] \subset U_{\overline{\alpha}}$ resulta daqui que $[0, \overline{x}] \subset U_{\overline{\alpha}} \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$ e, assim, $\overline{x} \in A$.

Prova que $\overline{x} = 1$

Já foi mostrado que $\overline{x} \in A$ e que $\overline{x} \in [0, 1]$, agora suponha por absurdo que $0 \leq \overleftarrow{x} < 1$.

Como $\overline{x} \in A$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ em $\mathcal{A}$ tais que $[0, \overline{x}] \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$. Sem perda de generalidade admita que $\overline{x} \in U_{\alpha_1}$.

Como U_{α_1} é aberto e $\overline{x} < 1$ existe $x^* \in]\overline{x}, 1]$ tal que $x^* \in U_{\alpha_1}$, isto mostra que $[0, x^*] \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$ e, portanto $x^* \in A$ o que cria uma contradição com o fato de $\overline{x}$ ser o supremo de A, uma vez que $x^* > \overline{x}$.

Assim deve-se de fato ter $\overline{x} = 1$.

Questão 5 Prove que se K e F são subconjuntos compactos de M então $K \cup F$ é compacto.

Fato 1 *Suponha que K é um subconjunto compacto de M e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de F.

Como F é fechado então $\Omega = M \setminus F$ é um suconjunto aberto de M.

Uma vez que $F \subset K$ tem-se que, se $\mathcal{G}_1$ é coleção formada pelos abertos de $\mathcal{G}$ acrescida de Ω, então $\mathcal{G}_1$ é uma cobertura aberta de K.

Por hipótese K é compacto, então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ em $\mathcal{A}$ tais que $K \subset \Omega \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$.

Daqui resulta, como $\Omega = M \setminus F$ e $F \subset K$, que $F \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$. ∎

Agora serão demonstradas duas propriedades gerais de conjuntos compactos em espaços métricos, precisamente, que todo conjunto compacto é fechado e limitado. Lembre que um subconjunto A de um espaço métrico M é dito limitado se existirem um ponto $x \in M$ e um $r > 0$ tais que $A \subset B_r(x)$.

Uma propriedade mais forte é a de subconjunto totalmente limitado, que se introduz agora.

Definição 3 *O subconjunto X de M é dito* ***totalmente limitado*** *se, por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $F_\varepsilon \subset K$ tal que $X \subset \bigcup_{x \in F_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$.*

Claro que todo conjunto totalmente limitado é limitado, O exemplo 3 mostra que há conjuntos limitados que não são totalmente limitados.

Agora será provado que conjuntos compactos são mais do que limitados, são totalmente limitados.

Fato 2 *Todo subconjunto compacto de um espaço métrico é totalmente limitado.*

Demonstração: Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico M e considere $\varepsilon > 0$.

Claro que $\mathcal{G} = (B_\varepsilon(x))_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K, portanto, da compacidade desse conjunto, $\mathcal{G}$ tem uma subcobertura finita, i.e., existem $x_1, \ldots, x_\ell$ em K tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B_\varepsilon(x_j)$. ∎

Fato 3 *Todo subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Será demonstrada a propriedade dual da enunciada, considera-se um subconjunto A do espaço métrico M que não é fechado e prova-se que A não é compacto.

Para isso vai exibir-se uma cobertura aberta de A que não possui subcoberturas finitas desse conjunto.

Como um conjunto é fechado se, e só se, ele contém todos os seus pontos de fronteira, resulta de A não ser fechado que existe um ponto $x \in M \setminus A$ que está na fronteira de A.

Agora tome, para cada natural n, o complementar da bola fechada de centro x e raio $\frac{1}{n}$, isto é, tome $\Omega_n = M \setminus B_{\frac{1}{n}}[x]$.

Da propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ é imediato ver que $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_n = M \setminus \{x\}$, assim, como $x \notin A$, tem-se que $\mathcal{G} = (\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de A.

Note que, por x ser um ponto da fronteira de A e $B_{\frac{1}{n}}[x]$ ser uma vizinhança de x, que existe, para cada natural n um ponto $x_n \in A \cap B_{\frac{1}{n}}[x]$. Claro que, para todo natural n tem-se $x_n \neq x$, pois $x \notin A$. Além disso, como $\Omega_n = M \setminus B_{\frac{1}{n}}[x]$, tem–se que $x_n \notin \Omega_n$.

Agora veja que, se r e s são naturais e $r < s$ então $\frac{1}{s} < \frac{1}{r}$, portanto $\Omega_r \subset \Omega_s$.

Desse modo, se $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ são naturais tais que $n_1 < n_2 < \cdots < n_\ell$ então $\Omega_{n_1} \subset \Omega_{n_2} \subset \cdots \subset \Omega_{n_\ell}$, portanto $\bigcup_{j=1}^{\ell} \Omega_{n_j} = \Omega_{n_\ell}$.

Como $x_{n_\ell} \in A \setminus \Omega_{n_\ell}$ isso mostra que $A \not\subset \bigcup_{j=1} \Omega_{n_j}$ e encerra a demonstração que $\mathcal{G}$ não tem subcobertura finita de A. Portanto, de fato A não é compacto. ∎

Observação 1 Os fatos 2 e 3 mostram que todo subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado, mas... apesar de alguns boatos em contrário, a recíproca desta propriedade é **falsa**! Isso pode ser visto pelo exemplo 3, ali se mostra que o subconjunto $X = \{e^j : j \in \mathbb{N}\}$ de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ é limitado, pois $X \subset B_2(e^1)$, e X não tem pontos de aumulação (todos os pontos de X são isolados) então X é fechado. E apesar de X ter essas duas propriedades, ser fechado e limitado, exibe-se naquele exemplo uma cobertura aberta de X que não possui subcobertura finita, ou seja... X **não** é um subconjunto compacto de $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

O que é verdade, e está provado no fato 11 (teorema de Heine-Borel) é que **em** $\mathbb{R}^p$ (com a distância habitual, ou qualquer uma equivalente à habitual) esta recíproca vale, *se $K \subset \mathbb{R}^p$ é fechado e limitado então K é compacto.*

Questão 6 Tente fazer agora a questão 2.

A última propriedade que será vista nesta seção é uma das mais importantes de conjuntos compactos, no exemplo 7 mostrou-se, conforme ali foi destacado, que todo intervalo fechado e limitado da reta é compacto, então esta propriedade é uma generalização da propriedade dos intervalos encaixantes.

Fato 4 [Propriedade dos Compactos Encaixantes]

Suponha que, para todo natural n, K_n seja um subconjunto compacto de M que não é vazio e, além disso, $K_{n+1} \subset K_n$.

Então $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Demonstração: Suponha por absurdo que o resultado não vale, ou seja $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ e considere $\Omega_n = M \setminus K_n$.

Como K_n é compacto, o fato 3 mostra que este conjunto é fechado, assim Ω_n é, por definição, aberto.

Além disso, como $K_{n+1} \subset K_n$, tem–se que $\Omega_n = (M \setminus K_n) \subset \Omega_{n+1} = M \setminus K_{n+1}$. Portanto:

(a) Se $r < s$ então $\Omega_r \subset \Omega_s$;

(b) Se $n_1 < n_2 < \cdots < n_\ell$ então $\bigcup_{j=1}^{\ell} \Omega_{n_j} = \Omega_{n_\ell}$.

Ademais, resulta da hipótese de absurdo, que $\mathcal{G} = (\Omega_n)_{n\geq 2}$ é uma cobertura aberta de K_1, pois se $x \in K_1$, como $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, tem–se $x \notin \bigcap_{j=1}^{\infty} K_n$, i.e., existe n_1 tal que $x \notin K_{n_1}$, portanto $x \in \Omega_{n_1}$ e, por (a), se $n \geq n_1$, tem–se $x \in \Omega_n$.

Assim, como K_1 é compacto, existem naturais $2 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_\ell$ tais que $K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \Omega_{n_j}$, então, por (b), $K_1 \subset \Omega_{n_\ell} = M \setminus K_{n_\ell}$. Mas, por hipótese, $K_{n_\ell} \subset K_1$, então ter–se–ia $K_{n_\ell} = \emptyset$ o que, também por hipótese, não pode acontecer. ∎

2 Conjuntos Sequencialmente Compactos

2.1 Noções gerais em espaços métricos

Definição 4 *Um subconjunto K do espaço métrico M é chamado* sequencialmente compacto *se, por definição, toda sequência (x_n) em K tem uma subsequência convergente para um ponto de K.*

O que fará nesta subseção é estabelecer as propriedades de conjuntos sequencialmente compactos em espaços métricos e mostrar que, neste contexto, as noções de compacidade e de sequencialmente compacto coincidem.

Primeiro mostra-se que os fatos 2 e 3 mantem-se verdadeiros para conjuntos sequencialmente compactos.

Fato 5 *Se K é um subconjunto de M sequencialmente compacto então K é fechado e totalmente limitado.*

Demonstração: K é fechado

Para provar que K é fechado basta mostrar que o conjunto K' formado pelos pontos de acumulação de K (o chamado conjunto derivado de KK) está contido em K.

Se $x \in K'$ então, pela definição de ponto de acumulação, existe uma sequência (x_n) de pontos de K, com $x_n \neq x$, para todo natural n, tal que $x_n \to x$. Assim, toda a subsequência de (x_n) converge para x portanto, como K é sequencialmente compacto, $x \in K$. ∎ (desta parte)

K é totalmente limitado

Suponha, por absurdo, que K é sequencialmente compacto e não é totalmente limitado, então existe $\varepsilon > 0$ tal que não há nenhuma cobertura aberta de K constituída por um número finito de bolas abertas de raio ε.

Então $K \neq \emptyset$, considere então um ponto $x_1 \in K$, e suponha que ε tem a propriedade supramencionada.

Agora vai-se provar, por indução finita em n a seguinte propriedade:

Existem pontos $x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n, \ldots$ em K tais que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, para todo par (i, j) tal que $1 \leq i < j$.

- *Caso inicial* $(n = 2)$:

  Resulta da forma como foi escolhido ε que $K \not\subset B_\varepsilon(x_1)$, assim, existe um ponto $x_2 \in K \setminus B_\varepsilon(x_1)$, portanto $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

- *Passo de indução*:

  Suponha, por hipótese de indução, que existem $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ em K tais que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, para todos os pares (i, j) tais que $1 \leq i < j \leq n$.

  Segue-se da forma como foi escolhido ε que $K \not\subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j)$.

  Tome então $x_{n+1} \in K \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(x_j) \right)$, claro que $d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, com o que fica completa a indução desejada.

Então, na sequência (x_n) de pontos de K que acabou de ser construída, se $i \neq j$, tem-se $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, portanto (x_n) não possui nenhuma subsequência convergente, o que contraria a hipótese de K ser sequencialmente compacto e essa contradição encerra a demonstração. ∎

Assim, todo subconjunto de M sequencialmente compacto é fechado e limitado, mas mais uma vez note que, a exemplo do que se viu para compactos, a recíproca desta propriedade é **falsa**, no exemplo 3 mostra-se que o conjunto $X = \{e^j : j \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto de $\ell_\infty(N)$ fechado e limitado (como já se observou na seção 1) que não é, evidentemente, sequêncialmente compacto.

A propriedade a seguir é uma peça chave para relacionar compactos e sequencialmente compactos.

Fato 6 [Número de Cobertura de Lebesgue para sequencialmente compactos]

Seja K um subconjunto sequencialmente compacto do espaço métrico M e considere $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de K. Então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in K$, existe $\alpha_x \in \mathcal{A}$ para o qual $B_\delta(x) \subset U_{\alpha_x}$.

Demonstração: Suponha por absurdo que o resultado não vale, então para todo $n \in \mathbb{N}$, o número $\delta_n = \frac{1}{n}$ não tem a propriedade desejada, i.e.,

$$\exists x_n \in K\colon (B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset U_\alpha,\ \forall\alpha \in \mathcal{A}) \quad (\dagger).$$

Considere a sequência (x_n) de pontos de K determinada em (†), como K é sequencialmente compacto, existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) que converge para um ponto $\overline{x} \in K$.

Uma vez que $\mathcal{G}$ é uma cobertura aberta de K, há um $\overline{\alpha} \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{x} \in U_{\overline{\alpha}}$, e este é um conjunto aberto, assim existe $\rho > 0$ para o qual $B_\rho(\overline{x}) \subset U_{\overline{\alpha}}$.

Agora veja que, como $x_{n_j} \to \overline{x}$, existe j_0 para o qual, se $j > j_0$, tem-se $d(x_{n_j}, \overline{x}) < \frac{\rho}{4}$, ademais, a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ garante que existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $j > j_1$ vale que $\frac{1}{n_j} < \frac{\rho}{4}$.

Portanto, se $j > \max\{j_0, j_1\}$, então $B_{\frac{1}{n_j}}(x_{n_j}) \subset B_\rho(\overline{x}) \subset U_{\overline{\alpha}}$, o que contradiz (†) e encerra a demonstração. ∎

Às vezes este resultado vem enunciado de uma forma um pouco diferente.

Fato 7 *Se $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ é uma cobertura aberta do subconjunto K sequencialmente compacto de M então existe $\delta > 0$ tal que, se x e y são pontos de K com $d(x, y) < \delta$, há um aberto $U_{xy} \in \mathcal{G}$ ao qual x e y pertencem.*

Demonstração: Considere δ o número de cobertura de Lebesgue de $\mathcal{G}$, se x e y estão em K e $d(x, y) < \delta$, tome $\alpha_x \in \mathcal{A}$ dado pelo fato 6 e $U_{xy} = U_{\alpha_x}$, e veja que, por aquele resultado, $y \in B_\delta(x) \subset U_{\alpha_x}$. ∎

Agora vai ser mostrado que, em espaços métricos, a propriedade de compacidade é equivalente à de sequencialmente compacto.

Fato 8 *Um subconjunto K do espaço métrico M é compacto se, e só se, K é sequencialmente compacto.*

Demonstração:

<u>compacto $\Longrightarrow$ sequencialmente compacto</u>

Suponha K compacto e tome uma sequência (x_n) em K.

Considere, para cada natural n, $A_n = \{x_j : j \geq n\}$ e seja F_n o fecho (topológico) de A_n, i.e., $F_n = \overline{A_n}$.

Como $A_n \subset K$, claro que $\overline{A_n} \subset \overline{K}$ e, como K é compacto, este conjunto é fechado (fato 3), portanto $F_n \subset K$.

Então, para todo natural n, F_n é um subconjunto fechado do compacto K, assim, pelo fato 1, F_n é compacto.

Claro que, para todo natural n, $F_n \neq \emptyset$, pois A_n não é vazio, e como $A_{n+1} \subset A_n$, tem–se $F_{n+1} \subset F_n$.

Então, pela propriedade dos compactos encaixantes, o fato 4, tem-se $\bigcap_{j=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Tome então $\overline{x} \in \bigcap_{j=1}^{\infty}$, claro que $\overline{x} \in K$ e há duas possibilidades:

(i) $\overline{x} \in A_n$ para todo n, nesse caso existe uma sequência de naturais (n_j), estritamente crescente, tal que $x_{n_j} = \overline{x}$, para todo n_j.

(ii) Existe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x} \notin A_{\overline{n}}$, então $\overline{x} \in F_n \setminus A_n$, para todo natural $n \geq \overline{n}$, portanto $\overline{x}$ é um ponto de acumulação de A_n e segue-se de pronto que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge para $\overline{x}$.

Nos dois casos fica demonstrado que K é sequencialmente compacto. ∎

sequencialmente compacto $\Longrightarrow$ compacto

Suponha agora que K é um suconjunto sequencialmente compacto de M e seja $\mathcal{G} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de K. Deve-se mostrar que $\mathcal{G}$ tem uma subcobertura finita.

Para isso tome δ o número de cobertura de Lebesgue de $\mathcal{G}$ dado pelo fato 6, e observe que, como K é sequencialmente compacto, este conjunto é totalmente limitado, portanto existem $x_1, \ldots, x_\ell$ em K tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} B_\delta(x_j)$.

Por fim, de δ ser o número de cobertura de Lebesgue de $\mathcal{G}$ vem que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\alpha_j \in \mathcal{A}$ tal que $B_\delta(x_j) \subset U_{\alpha_j}$, o que, junto com a inclusão obtida no parágrafo anterior, mostra que $(U_{\alpha_j})_{1 \leq j \leq n}$ é a procurada subcobertura finita. ∎

Com isto vê-se que os resultados sobre número de cobertura de Lebestgue, fatos 6 e 7

2.2 Compacidade em $\mathbb{R}^p$

Na subseção anterior mostrou-se que em espaços métricos as noções de compacidade e de sequencialmente compacto coincidem, usa-se isso agora para estudar e caracterizar compacidade em $\mathbb{R}^p$ através da caracterização de subconjuntos sequencialmente compactos, que deixa a análise um pouco mais simples.

O grande artista para isso é o teorema de Bolzano-Weierstrass, esse resultado afirma que todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^p$ tem pelo menos um ponto de acumulação, e impede que situações como as do exemplo 3 existam em $\mathbb{R}^p$, em termos mais precisos, essa propriedade tem uma consequência imediata, *toda sequência limitada em $\mathbb{R}^p$ tem uma subsequência convergente*, e isto permite fazer uma festa com o conceito de sequencialmente compacto.

Fato 9 *Um subconjunto K de $\mathbb{R}^p$ é sequencialmente compacto se, e só se, K é fechado e limitado.*

Demonstração: É consequência direta do fato 5 que todo subconjunto sequencialmente compacto de um espaço métrico qualquer, em particular de $\mathbb{R}^p$, é fechado e limitado.

Para a recíproca, seja $K \subset \mathbb{R}^p$ fechado e limitado, e considere uma sequência (x_n) em K.

Como K é limitado, (x_n) tem uma subsequência convergente, e por K ser fechado, o limite dessa subsequência está em K. ∎

Uma consequência topológica é imediata.

Fato 10 *Todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^p$ é totalmente limitado.*

Demonstração: Seja $A \subset \mathbb{R}^p$ limitado. Para demonstrar o resultado basta provar que $\overline{A}$ é totalmente limitado.

Para ver isso note que $\overline{A}$ é fechado e limitado, portanto, pelo fato 9, $\overline{A}$ é sequencialmente compacto.

Assim, pelo fato 5, $\overline{A}$ é totalmente limitado. ∎

Neste ponto pode-se obter o celebrado teorema de Heine-Borel (também conhecido como teorema de Borel-Lebesgue) que caracteriza subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^p$, basta lembrar que, em espaços métricos, um conjunto é compacto se, e somente se, for sequencialmente compacto, usar o fato 9 e concluir que *um subconjunto de $\mathbb{R}^p$ é compacto se, e só se, for fechado e limitado*, registre-se com o devido destaque esse resultado!

Fato 11 *O subconjunto K de $\mathbb{R}^p$ é compacto se, e apenas se, for fechado e limitado.*

3 Funções Contínuas e Compacidade

Fato 12 *Sejam $f : M \longrightarrow N$ contínua e K um sujconjunto compacto de M. Então $f(K)$ é um subconjunto compacto de N.*

Apresentam-se duas demonstrações deste resultado, no texto de Bartle esta propriedade é enunciada no contexto de $M = \mathbb{R}^p,\ N + \mathbb{R}^q$ e é feita uma terceira prova que usa o teorema de Heine-Borel e portanto só vale para esse caso, a demonstração dessa situação particular não é mais simples do que as mostradas aqui para o caso geral.

Primeira Demonstração

Seja $\mathcal{G} = (V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Deve-se provar que $\mathcal{G}$ tem uma subcobertura finita.

Como f é contínua e, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, V_α é aberto, tem–se que $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ é um subconjunto aberto de M.

Agora veja que, se $K_1 = f^{-1}(f(K))$, então é claro que $K \subset K_1$ e $\mathcal{G}_1 = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ é uma cobertura aberta de K_1.

Portanto $\mathcal{G}_1$ é uma cobertura aberta de K e, por este ser um subconjunto compacto de M, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} U_{\alpha_j}$.

Assim $f(K) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} V_{\alpha_j}$. ∎

Segunda Demonstração

Como em espaços métricos um conjunto é compacto se, e só se, é sequencialmente compacto, basta provar que $f(K)$ é sequencialmente compacto.

Para isto tome uma sequência (y_n) em $f(K)$ e considere $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$.

Como K é compacto, tem–se que este é um subconjunto sequencialmente compacto de M e portanto (x_n) tem uma subsequência (x_{n_j}) convergente para um ponto $\overline{x} \in K$.

A continuidade de f mostra que $y_{n_j} = f(x_{n_j}) \to f(\overline{x}) \in f(K)$. ∎

Uma propriedade importante refere-se a funções injetoras definidas em um conjunto compacto.

Para apreciar essa propriedade com o "devido respeito"coloca-se aqui um pequeno exemplo.

Exemplo 8 Considere $\Gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Claro que Γ é contínua, injetora e sua imagem é a circunferência de centro na origem e raio 1, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

A função inversa $\Gamma^{-1} : S \longrightarrow [0, 2\pi[$ não é contínua em todos os pontos.

De fato, uma maneira simples de ver isto é notar que, pelo fato 9, S é sequencialmente compacto, portanto compacto, assim, se Γ^{-1} fosse contínua em todos os pontos, o fato 12 sua imagem deveria ser um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, mas $[0, 2\pi[$ não é fechado, portanto não tem essa propriedade.

Um modo mais direto de provar que Γ^{-1} não é contínua em todos os pontos é notar que essa função tem uma descontinuidade em $P = (1, 0)$. De fato, $\Gamma^{-1}(P) = 0$ e, se $\theta_n = 2\pi - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ então $P_n = (\cos\theta_n, \sin\theta_n) \in S$, e claro que $P_n \to P$, mas $\Gamma^{-1}(P_n) = \theta_n \to 2\pi \neq \Gamma^{-1}(P) = 0$.

Isso mostra que existem funções entre espaços métricos contínuas e injetoras cuja inverta não é contínua, mas se o domínio for compacto...

Fato 13 *Suponha que $K \subset M$ é compacto e que $f : K \longrightarrow N$ é contínua e injetora. Então sua inversa é contínua.*

Demonstração: Seja $K_1 = f(K)$ a imagem de f, pelo fato 12, K_1 é um subconjunto compacto de N, portanto fechado.

Lembre que, pelo teorema de continuidade global, se X é um subconjunto do espaço métrico N, $g : X \longrightarrow M$ é contínua se, e só se, para todo subconjunto $H \subset M$ fechado, existe $F \subset N$, fechado, tal que $g^{-1}(H) = F \cap X$. Claro que se $g^{-1}(H)$ for fechado, isso é verdade.

Considere $g = f^{-1}$ que está definida de K_1 em M, e cuja imagem é K. Se $H \subset M$ é fechado então $\widetilde{H} = H \cap K$ é um subconjunto fechado de K, portanto compacto (pelo fato 1) e, por f ser injetora, $g^{-1}(H) = g^{-1}(\widetilde{H}) = f(\widetilde{H})$ é compacto e, portanto, fechado. ∎

3.1 Continuidade Uniforme

Pode–se dizer que o conceito de continuidade é, em sua essência, topológico, trata-se de preservar a estrutura toplógica. Já o conceito de continuidade uniforme que é introduzido aqui tem natureza métrica.

Definição 5 *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita uniformemente contínua se, por definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$[x \in M,\ y \in M,\ d(x,y) < \delta] \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Claro que toda função uniformemente contínua é contínua, a recíproca porém é falsa.

Questão 7 Prove que $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty),\ f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua.

O seguinte resultado começa a mostrar a força de funções uniformemente contínuas.

Fato 14 *Se $f : M \longrightarrow N$ é uniformemente contínua e (x_n) é uma sequência de Cauchy em M então $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em N.*

Demonstração: Para $\varepsilon > 0$ tome o $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ correspondente na definição de continuidade uniforme, e veja que, como (x_n) é de Cauchy, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, se m e n são naturais maiores do que k, tem–se $d(x_m, x_n) < \delta$.

Portanto, para $m > k$ e $n > k$ tem-se $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. ∎

Este resultado pode ser usado para provar facilmente que $f(x) = \frac{1}{x}$ definida em $M = (0, +\infty)$ não é uniformemente contínua, pois a sequência $x_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1$, que claramente é de Cauchy, é levada por f na sequência $y_n = f(x_n) = n$ que não é de Cauchy (nem mesmo é limitada). Assim f não é uniformemente contínua.

Uma questão que pode ser levantada neste ponto é sobre a validade, ou não, da recíproca do fato 14, a resposta vem em forma de exercício.

Questão 8 Exiba um exemplo de função que leva sequências de Cauchy mas não é uniformemente contínua.

Sugestão: "Basta"exibir uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua, mas não uniformemente contínua.

Um resultado importante é o seguinte:

Fato 15 *Seja K um subconjunto compscto de M e considere $f : K \longrightarrow N$ contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: O livro texto faz duas demonstrações, aqui apresenta-se uma baseada no número de cobertura de Lebesgue, mais precisamente, no fato 7 que, como frisado antes, vale para subconjuntos compactos de espaços métricos.

Considere $K_1 = f(K)$ a imagem de f, que pelo fato 12 é compacto.

Tome $\varepsilon > 0$ e considere a cobertura aberta de K_1, $\mathcal{G} = (B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z))_{z \in K_1}$.

Claro que se $W_z = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z))$, por f ser contínua e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ ser aberto, existe um subconjunto aberto de M, U_z, tal que $W_z = U_z \cap K$ e assim, $\mathcal{G}_1 = (U_z)_{z \in K_1}$ é uma cobertura aberta de K.

Use o a compacidade de K e o fato 7 para ver que existe $\delta > 0$ tal que, se x e y estão em K e $d(x, y) < \delta$, há um $\widetilde{z} \in K_1$ tal que $\{x, y\} \subset U_{\widetilde{z}}$.

Assim, $f(x)$ e $f(y)$ estão em $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\widetilde{z})$ e segue-se que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. ∎