# MAT 0147: Cálculo II (T21-FEA-USP)

## Teorema da função implícita e multiplicadores de Lagrange

Guia Resumido 8
Prof. Marcos Alexandrino (IME-USP)

Dezembro 2020

**Alerta:** Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra http://www.geogebra.org (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras a mão para compreende-las melhor.

**Objetivo:** Estudar:

- Teorema da função implícita;
- plano tangente a superfície de nível;
- multiplicadores de Lagrange;

# Motivação do teorema da função implícita

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x_1^2 + x_2^2$. Considere a curva de nível $C = g^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ Note que ela é **regular** i.e., $\nabla g(p) \neq (0,0), \forall p \in C$, mas não é um gráfico.

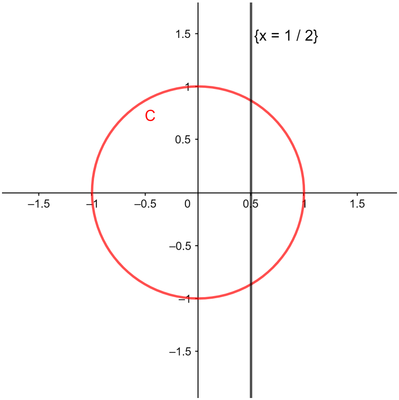
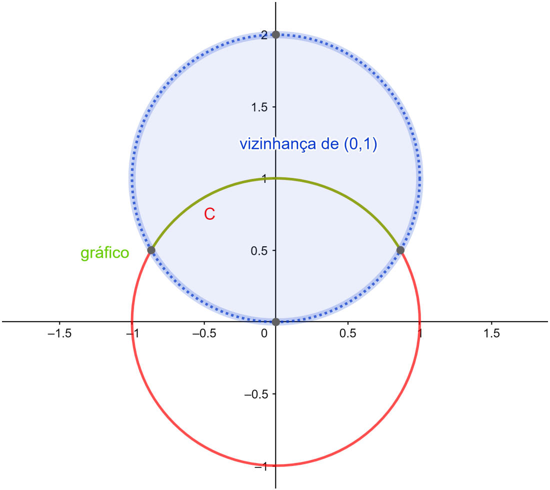



Figura: $C$ intersepta $\{x_1 = \frac{1}{2}\}$ em mais de 1 ponto, logo não é gráfico

$C$ não é gráfico, mas é um **gráfico local**, i.e., $\forall p \in C$ existe vizinhança $B_\epsilon(p)$ tal que $C \cap B_\epsilon(p)$ é gráfico de uma função. Ex, se $p = (0,1)$ então, $\epsilon = 1$ e $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ onde $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ Note que $g(x_1, h(x_1)) = 1$, i.e, $h$ é implícita.

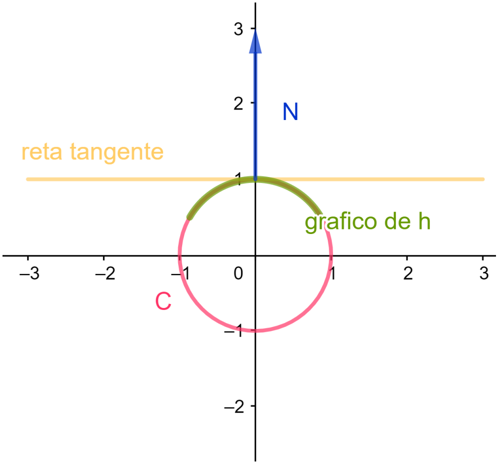


# Teorema da função implícita: curva em $\mathbb{R}^2$

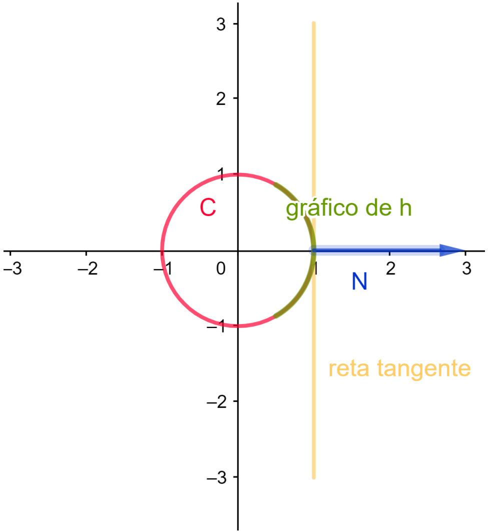
Teorema

*Seja $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função de classe $C^1$ tal que $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) = c\}$ é **regular** i.e., $\nabla g(p) \neq (0,0)$ $\forall p \in C$. Então $C$ é **gráfico local**. Em outras palavras, para cada $p \in C$, existe vizinhança $B_\epsilon(p)$ tal que $C \cap B_\epsilon(p)$ é gráfico de uma função.*

Em particular se $\frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \neq 0$ ou seja $N = \nabla g(p) \neq (\lambda, 0)$ então existe função $h : I \to \mathbb{R}$ com $x_2 = h(x_1)$ e assim $g(x_1, h(x_1)) = c$



Em particular se $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$ ou seja $N = \nabla g(p) \neq (0, \lambda)$ então existe função $h : I \to \mathbb{R}$ com $x_1 = h(x_2)$ e assim $g(h(x_2), x_2) = c$



**Obs** Embora por vezes seja difícil determinar explicitamente a função implícita $h : I \to \mathbb{R}$, é possível **cálcular a derivada** $h'(p_1)$.

De fato se $\frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \neq 0$, $h : (p_1 - \epsilon, p_1 + \epsilon) \to \mathbb{R}$ e $g(x_1, h(x_1)) = c$ podemos definir $\alpha(t) = (t, h(t))$ e e derivando $g(\alpha(t)) = c$ em $t = p_1$, temos pela regra da cadeia:

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) h'(p_1)$$

e assim concluimos:

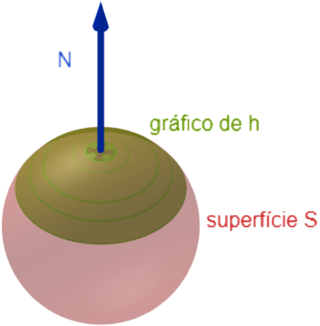
$$h'(p_1) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(p)}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(p)}$$

# Teorema da função implícita: superfície em $\mathbb{R}^3$

Teorema

*Seja $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função de classe $C^1$ tal que $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = c\}$ é **regular** i.e., $\nabla g(p) \neq (0,0,0)$ $\forall p \in S$. Então $S$ é **gráfico local**. Em outras palavras, para cada $q \in S$, existe vizinhança $B_\epsilon(q)$ tal que $S \cap B_\epsilon(q)$ é gráfico de uma função (em relação a $\{x_3 = 0\}$ ou $\{x_2 = 0\}$ ou $\{x_1 = 0\}$).*

Em particular se $\frac{\partial g}{\partial x_3}(q) \neq 0$ ou seja $N = \nabla g(q) \neq (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ então existe função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $x_3 = h(x_1, x_2)$ e assim $g(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = c$



De forma análoga:

Se $\frac{\partial g}{\partial x_2}(q) \neq 0$ ou seja $N = \nabla g(q) \neq (\lambda_1, 0, \lambda_2)$ então existe função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $x_2 = h(x_3, x_1)$ e assim $g(x_1, h(x_3, x_1), x_3) = c$

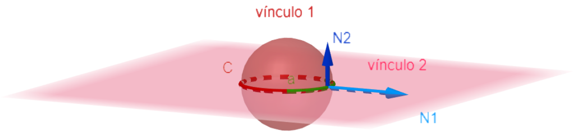
Se $\frac{\partial g}{\partial x_1}(q) \neq 0$ ou seja $N = \nabla g(q) \neq (0, \lambda_1, \lambda_2)$ então existe função $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $x_1 = h(x_2, x_3)$ e assim $g(h(x_2, x_3), x_2, x_3) = c$

**Prob:** Suponha que $\frac{\partial g}{\partial x_2}(q) \neq 0$ e $g(x_1, h(x_3, x_1), x_3) = c$. Calcule $dh$

# Teorema da função implícita: caso geral

**Teo** Seja $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ aplicação de classe $C^1$ tal que $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$ é **regular** i.e., $DG(x)$ é sobrejetora $\forall x \in M$. Em outras palavras, os gradientes dos vínculos $g_i$ são linearmente independentes. Então $M$ é **gráfico local**. Em outras palavras, para cada $q \in M$, existe vizinhança $B_\epsilon(q)$ tal que $M \cap B_\epsilon(q)$ é gráfico de uma aplicação $H : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

**Ex 1:** Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definido como $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$ onde $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e $g_2(x) = x_3$. Note que $C = G^{-1}(1,0)$ é interseção de $g_1^{-1}(1)$ e $g_2^{-1}(0)$ e que $N_1 = \nabla g_1(x)$ e $N_2 = \nabla g_2(x)$ são L.I para $x \in C$.



**Comentários (bordo de uma superfície com bordo):**

Sejam $S_i = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_i(x) = c_i\}$ superfícies regulares ($i = 1$ ou $i = 2$) e $\mathbf{C} = S_1 \cap S_2$ curva onde $\nabla g_1(x)$ e $\nabla g_2(x)$ são linearmente independentes para $x \in \mathbf{C}$. Então $\mathbf{C}$ é bordo da **superfície com bordo** $S = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_2(x) \geq c_2\}$

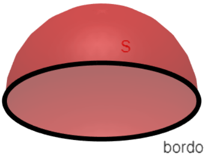



Figura: $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $g_2(x) = x_3$, $c_1 = 1$ , $c_2 = 0$

# Plano tangente a superfície de nível

Seja $S = \{x \in U \in \mathbb{R}^3 | g(x) = c\}$ uma superfície regular (i.e., $\nabla g(x) \neq 0 \; \forall x \in S$) onde $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função de classe $C^1$. Dado $q = (q_1, q_2, q_3) \in S$ definimos **plano tangente no ponto** $q$ (denotado por $T_q S$) como o plano definido pela equação

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x_1}(q)(x_1 - q_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(q)(x_2 - q_2) + \frac{\partial g}{\partial x_3}(q)(x_3 - q_3) = 0}$$

**Prop (interpretação geométrica):** Dado uma superície regular $S$. As afirmações a seguir são equivalentes:

(a) existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ com $\alpha'(0) = v_q$;

(b) $v_q \in T_qS$

**Dem:** Suponha que (a) seja verdadeiro. Então temos $g(\alpha(t)) = c$. Assim pela regra da cadeia

$$0 = \langle \nabla g(q), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla g(q), v_q \rangle$$

e assim $v_q \in T_qS$ ou seja (b) foi atendido.

Suponha que (b) seja verdadeiro, i.e, $v \in T_qS$, i.e,

$$v_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(q) + v_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(q) + v_3 \frac{\partial g}{\partial x_3}(q) = 0$$

Se $\frac{\partial g}{\partial x_3}(q) \neq 0$ existe $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x_1, x_2, h(x)) = c$. Defina $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ como $\beta(t) = (q_1, q_2) + t(v_1, v_2)$ e $\alpha(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), h(\beta(t)))$. Assim $g(\alpha(t)) = c$ (i.e, $\alpha \subset S$). Derivando em $t = 0$ temos:

$$0 = \langle \nabla g(q), \alpha'(0) \rangle = v_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(q) + v_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(q) + \alpha_3'(0) \frac{\partial g}{\partial x_3}(q)$$

As duas eq. garantem que $\alpha_3'(0) \frac{\partial g}{\partial x_3}(q) = v_3 \frac{\partial g}{\partial x_3}(q)$, logo $\alpha_3'(0) = v_3$. Assim $\alpha'(0) = v_q$ e $\alpha \subset S$, ou seja (a) é verdadeira.

**Obs:** O plano tangente associado ao gráfico de função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pode ser visto como o plano tangente a uma superfície de nível associada a uma função $g : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

De fato, defina $g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - f(x_1, x_2)$. Note que $S = g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | g(x) = 0\}$ é gráfico de $f$. Então para $q = (p_1, p_2, f(p_1, p_2)) \in S$ temos:

$$\nabla g(q) = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2), 1)$$

e assim o plano tangente de $S$ é:

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) + (x_3 - f(p)) = 0$$

**Prob** Determine o plano tangente ao toro $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ \ (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3)^2 + x_3^2 = 1\}$ passando pelo ponto $q = (\frac{7}{4}, \frac{7\sqrt{3}}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{4})$.

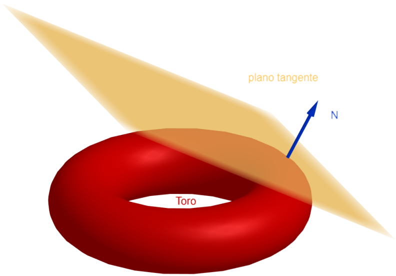



Figura: $\frac{1}{2}(x_1 - \frac{7}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - \frac{7\sqrt{3}}{4}) + \sqrt{3}(x_3 - \frac{2\sqrt{3}}{4}) = 0$ é a equação do plano tangente ao toro $S$

**Comentários (espaço tangente)** Sejam $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ de classe $C^1$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$ um conjunto regular, i.e., $DG(x)$ é sobrejetor para todo $x \in M$. Em outras palavras $\nabla g_i(x)$ são L.I para todo $x \in M$. Então o **espaço tangente** é definido como $T_qM = \ker DG(q)$ ou seja

$$v_q \in T_qM \text{ sse } \langle v_q, \nabla g_i(q) \rangle = 0 \ \forall i$$

A interpretação geométrica continua a mesma, ou seja $v_q \in T_qM$ sse existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha'(0) = v_q$.

# Revisão: multiplicadores de Lagrange (baby version)

No Guia 6, **aceitando** o teorema da função implícita vimos o seguinte resultado:

**Prop** Sejam $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função diferenciável, $C = g^{-1}(c) = \{x \in U | g(x) = c\}$ a curva de nível associada e $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função diferenciável com domínio $\tilde{U}$ contendo $U$. **Suponha que:**

(a) $\nabla g(x) \neq (0,0)\ \forall x \in C$;

(b) $u|_C$ (função **restrita a** $C$) tenha **máximo ou mínimo em um ponto** $p \in C$;

**Então:**

$$\begin{aligned} \nabla u(p) &= \lambda \nabla g(p) \\ c &= g(p) \end{aligned}$$

**Ex 2:** Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ Obtenha os pontos de máximo e mínimo de $u|_C$ onde $C = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Como $C$ é fechado e limitado existe de fato valor maxímo e mínimo. Se $p$ é máximo ou mínimo temos:

$$\begin{aligned} (1,1) = \nabla u(p) &= \lambda \nabla f(p) = \lambda(2p_1, 2p_2) \\ 1 &= p_1^2 + p_2^2 \end{aligned}$$

Obs que $p_i \neq 0$. Isto e a primeira eq. implicam que $p_2 = p_1$, o qual substitutido na segunda eq. permite concluir que as soluções do sistema são $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\tilde{p} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

Como $u(p) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ e $u(\tilde{p}) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$, concluimos que $p$ é o ponto onde $u$ assume o maior valor e $\tilde{p}$ o ponto onde $u$ assume menor valor.

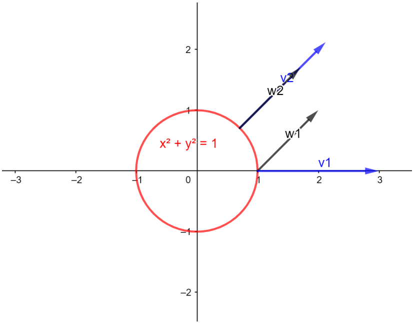



Figura: Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
$w_2 = \nabla u(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lambda \nabla f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lambda v_2$ isto não acontece por ex no ponto $(1, 0)$.

## Ex 3: Cobb-Douglas e orçamento de 2 produtos

Considere o vinculo $C = \{x \in \mathbb{R}^2 |\, 2x_1 + x_2 = w |\, x_i \geq 0\}$ onde $w$ é um valor fixo (orçamento). Considere a função Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Determine o máximo de $u|_C$.

Se $s = (s_1, s_2)$ é ponto de máximo, ele deve antender:

$$\begin{array}{rcl} (\frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}}) = \nabla u(s) & = & \lambda \nabla f(s) = \lambda(2,1) \\ w & = & 2s_1 + s_2 \end{array}$$

**Resposta:** $s(w) = (\frac{w}{4}, \frac{w}{2})$

**Comentários (shadow prices):** No caso **bem particular** de Cobb Douglas temos a existência de um **único máximo** $s(w)$ **para cada vínculo** $C_w = g^{-1}(w)$, o que nos dá uma curva diferenciável $w \to s(w) \in C_w$. Em particular $g \circ s(w) = w$ Por ser máximo temos: $\nabla u(s(w)) = \lambda(w)\nabla g(s(w))$ Assim, ao multiplicar ambos os lados por $s'(w)$ concluimos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dw} u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\
&= \lambda(w) \langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\
&= \lambda(w) \frac{d}{dw} g \circ s(w) \\
&= \lambda(w)
\end{aligned}
$$

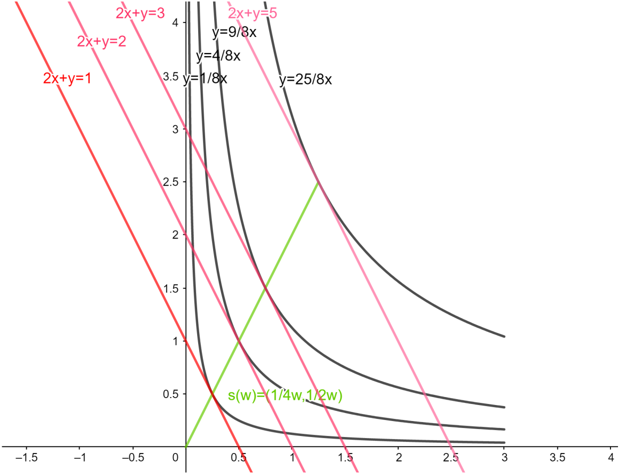



Figura: curvas de máximos no caso **particular de** $u$ sendo **Cobb Douglas** e vários vinculos dado por orçamentos. Lembre que em problemas gerais de multiplicadores de Lagrange não precisa existir uma curva bem definida $w \to s(w)$

# Multiplicadores de Lagrange: 1 vínculo em $\mathbb{R}^3$

**Prop:** Sejam $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função diferenciável, $S = g^{-1}(c) = \{x \in U | g(x) = c\}$ superfície de nível **regular** associada (i.e., $\nabla g(x) \neq (0,0,0)\ \forall x \in S$) e $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função diferenciável com domínio $\tilde{U}$ contendo $U$. **Suponha que:** $u|_S$ (função **restrita a** $S$) tenha **máximo ou mínimo em um ponto** $q \in S$; **Então** $\nabla u(q)$ é perpendicular a $S$ em $q \in S$, i.e.,

$$
\begin{aligned}
\nabla u(q) &= \lambda \nabla g(q) \\
c &= g(q)
\end{aligned}
$$

**Obs:** Neste tipo de problema, a função $g$ é usualmente chamada de **vínculo**.

**Dem:** Pela definição do plano tangente temos que $\nabla g(q)$ **é ortogonal** $T_qS$ ou seja:

$$\langle \nabla g(q), w_q \rangle = 0, \ \forall w_q \in T_qS \tag{1}$$

Pela interpretação geométrica do plano tangente, para cada $v_q \in T_qS$ existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to S \subset \mathbb{R}^3$ com $\alpha'(0) = v_q$. Visto que $u|_S$ (função **restrita a** $S$) tem **máximo ou mínimo em** $q \in S$, temos que a função $h(t) = u(\alpha(t))$ tem máximo ou mínimo interior em $t = 0$, i.e., $h'(0) = 0$. Assim, **pela regra da cadeia**, $0 = h'(0) = \langle \nabla u(q), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla u(q), v_q \rangle$ Como isto pode ser feito para qualquer outro $v_q \in T_qS$ concluimos:

$$\langle \nabla u(q), w_q \rangle = 0, \ \forall w_q \in T_qS \tag{2}$$

ou seja $\nabla u(p)$ é **ortogonal a** $T_qS$ Equações (1) e (2) implicam que

$$\nabla u(q) = \lambda \nabla g(q)$$

o que termina a demonstração.

## Ex 4: Cobb-Douglas e orçamento para 3 produtos

Seja $\{S = x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \; x_i > 0\}$ a superfície que representa um vínculo orçamentário de 3 produtos. Considere a função utilidade $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ Determine o ponto $q \in S$ onde $u|_S$ assume maior valor e determine tal valor.

Resolvendo o sistema dado por multiplicador de Langrange:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}x_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}x_2^{-\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}x_3^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}\right) &= \lambda(6,3,2) \\
6 &= 6x_1 + 3x_2 + 2x_3
\end{aligned}$$

temos que $q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ e $u(q) = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}$. Visto que $\overline{S}$ (fecho de $S$) é fechado e limitado e que o máximo não acontece no bordo $\partial S$ (onde $u$ é zero) $q$ tem que ser de fato o ponto de máximo.

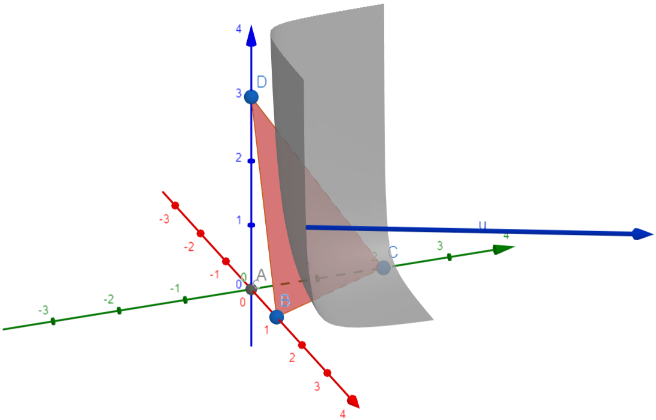



Figura: superfície de nível $u^{-1}(\sqrt[3]{\frac{2}{9}})$ (associada a **função utilidade** $u$) tangente ao vínculo orçamentário $S$ no ponto de máximo $q$, e o vetor $N = \nabla g(q)$.

**Prob:** Determine o volume do maior paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados que pode ser inscrito em $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 = 36\}$

**Resposta:** $\frac{16\sqrt{3}}{3} = f(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ onde $f(x) = 8x_1x_2x_3$ representa a função volume e $x_1, x_2, x_3 > 0$ representam as coordenadas do vertice do paralelepípipedo contido no primeiro octante e tangentes a $S$.

# Múltiplicadores de Langrange: 2 vínculos em $\mathbb{R}^3$

**Prop:** Seja $G : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicação de classe $C^1$ e $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid G(x) = c\}$ curva regular, i.e., $DG(x)$ é sobrejetora para todo $x \in C$ ou seja $\nabla g_1(x)$ e $\nabla g_2(x)$ são L.I para $x \in C$. Seja $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ com $U \subset \tilde{U}$ e suponha que $u|_C$ ($u$ restrita a $C$) tenha máximo ou mínimo local em $q \in C$. **Então** $\nabla u(q)$ é perpendicular a $C$ em $q \in C$, i.e.,

$$
\begin{aligned}
\nabla u(q) &= \lambda_1 \nabla g_1(q) + \lambda_2 \nabla g_2(q) \\
c_1 &= g_1(q) \\
c_2 &= g_2(q)
\end{aligned}
$$

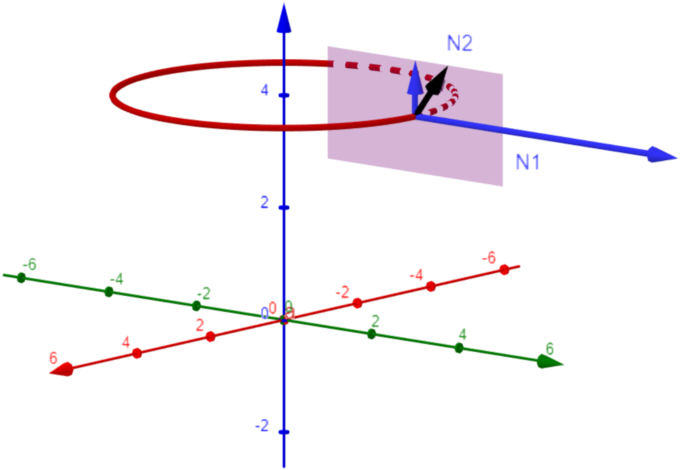
**Obs:** como usual $g_i$ são chamados **vínculos**.

**Ex 5:** Sejam $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função definida como $u(x) = \frac{3}{4}x_2 + x_3$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicação $G(x) = (g_1(x), g_2(x))$ onde $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ e $g_2(x) = x_3$. Considere a curva espacial $C = G^{-1}(9,4) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 9, x_3 = 4\}$ Determine os pontos onde $u|_C$ assume valor máximo e assume valor mínimo, e diga quais são tais valores.

Visto que $C$ é compacta (i.e., limitada e fechada) existe valor máximo e mínimo global. Assim por multiplicador de Lagrange (2 vínculos) temos:

$$
\begin{aligned}
(0, \frac{3}{4}, 1) = \nabla u(x) &= \lambda_1(2x_1, 2x_2, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) \\
9 &= x_1^2 + x_2^2 \\
4 &= x_3
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema acima concluímos que $(0, -3, 4)$ é ponto de mínimo global, com valor $\frac{7}{4}$ e $(0, 3, 4)$ é ponto de máximo global, com valor $\frac{25}{4}$.


N2
N1
4
2
-2
0
-6
-4
-2
2
4
6
-6
-4
-2
2
4
6

# Multiplicador de Lagrange: $k$-vínculos em $\mathbb{R}^{m+k}$

**Teo:** Sejam $G : U \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ aplicação de classe $C^1$ definida como $G(x) = (g_1(x), \cdots, g_k(x))$ e $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid G(x) = c\}$ é **regular** i.e., $DG(x)$ é sobrejetora $\forall x \in M$. Em outras palavras, $\{\nabla g_i\}_{i=1}^k$ são linearmente independentes. Seja $u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$. Suponha que existe $q \in M$ tal que $u|_M$ tem valor máximo ou mínimo local. Então $\nabla u(q)$ é ortogonal a $M$ em $q$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\nabla u(q) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(q) \\
c_1 &= g_1(q) \\
\vdots \; &\; \vdots \; \vdots \\
c_k &= g_k(q)
\end{aligned}
$$

# Comentários: Matriz Hessiana orlada

**Motivação:**

Sejam $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $u(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x) = x_1 = c\}$, $p = (c, 0, 0)$ e $f = u|_S$. Desejamos saber se $p$ é ponto de máximo ou mínimo local de $f$ e ao mesmo tempo motivar a apresentação do critério da Hessiana orlada.

Fácil ver que

- $f(x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1 c^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2)$
- $\mathrm{grad}\, \mathrm{f}(0,0) = (0,0)$
- $\mathrm{Hess}\, f(0,0) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ Assim pelo Guia 7, $p$ é máximo local de $f$ se $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ e é mínimo se $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$

Fizemos uma conta intrínsica. Mas e se quisermos fazer uma conta extrínsica, i.e., usando $u$? Primeira coisa notamos que

$$\nabla u(p) = (\lambda_1 c, 0, 0) = \lambda \nabla g(p) = \lambda(1, 0, 0)$$

Ou seja, por multiplicador de Lagrange, $p$ é o candidato para ser máximo ou mínimo. Note também que $\mathrm{Hess}\,\mathrm{u}(p) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ e assim contém informação a mais (não precisamos saber sinal de $\lambda_1$, se ele for positivo ou negativo não mudará o resultado).

Suponha que voce esteja ensinando um computador a se livrar da informação adicional (i.e., $\lambda_1$). Um bom truque é usar a seguinte matriz orlada (colocando $\nabla g(p) = (1, 0, 0)$ no bordo).

$$\overline{H}_3 = \overline{\mathrm{Hess\,u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ e } \overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Visto que $\det \overline{H}_2 = (-1)\lambda_2$ e $\det \overline{H}_3 = (-1)\lambda_2\lambda_3$ concluimos que:

- Se $\det \overline{H}_2 < 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então $p$ é mínimo de $f$ $(\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0)$.
- Se $\det \overline{H}_2 > 0$ e $\det \overline{H}_3 < 0$, então $p$ é máximo de $f$ $(\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0)$.

O truque da matriz orlada parece ser bom no caso em que $S$ é um plano.

## Matriz $H$ e Teorema

Mas se $S$ não for um plano? Se $S$ tiver curvatura diferente de zero? (vide comentário Guia 7). Para lidar com tal questão no lugar de usar $\mathrm{Hess}\,\mathrm{u}(p)$ precisaremos em geral usar uma outra matriz simétrica $H$, relacionada ao conceito hessiano intrinsico (**o qual vamos discutir dentro em breve**).

**Def:** Sejam $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x) = c\}$ superfície regular e $p \in S$ é tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, onde $u$ e $g$ são suaves. Definimos:

$$H = \mathrm{Hess}\,\mathrm{u}(p) - \lambda \mathrm{Hess}\,\mathrm{g}(p)$$

Antes de discutir mais sobre $H$ vamos apresentar o Teorema desta seção que foi ilustrado pela nossa motivação.

**Teo** Seja $p \in S$ com $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$. Suponha que $\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \neq 0$.

- Se $\det \overline{H_2} < 0$ e $\det \overline{H_3} < 0$ então $p$ é mínimo local de $f$.
- Se $\det \overline{H_2} > 0$ e $\det \overline{H_3} < 0$ então $p$ é máximo local de $f$.

onde

$$\overline{H_3} = \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(p) & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overline{H_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) & H_{11} & H_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(p) & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

**Ingredientes da prova:**

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | g(x) = c\}$ superfície regular. Uma vez abordado o teorema, iremos investigar alguns conceitos do cálculo intrínsico em $S$ e ingredientes da prova do Teorema (vide Prop 3 e 4).
Em particular, vamos comentar:

(a) gradiente Riemanniano (intrínsico) de $f : S \to \mathbb{R}$,
(b) reformulação intrínsica de multiplicadores de Lagrange,
(c) Derivada covariante de campos tangentes a $S$;
(d) o conceito de Hessiano Riemanniano (ou intrínsico)
(e) De volta a discussão extrínsica
(f) Matriz orlada
(g) Observações finais

## (a) Gradiente Riemanniano (ou intrínsico) de $f : S \to \mathbb{R}$

Lembremos que sendo $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é diferenciável,

$$du_p X = \langle \nabla u(p), X \rangle, \ \forall X \in T_p\mathbb{R}^m$$

Agora se a mesma função fica restrita a $S$, ou seja se $f = u|_S$ então podemos definir o campo **gradiente Riemanniano** $\mathrm{grad}\, f(p)$ como **o campo tangente a $S$** que atende:

$$df_p X = \langle \mathrm{grad}\, f(p), X \rangle, \ \forall X \in T_pS$$

Em particular $\mathrm{grad}\, f(p)$ é a parte tangente de $\nabla u(p)$, ou seja:

$$\boxed{\mathrm{grad}\, f(p) = \nabla u(p) - \langle \nabla u(p), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}}$$

**(b) Reformulação intrínsica de multiplicadores de Lagrange**

Visto que $\operatorname{grad} f(p)$ é a parte tangente de $\nabla u(p)$ podemos reformular multiplicadores de Lagrange como:

**Prop 1:** Se $f : S \to \mathbb{R}$ tem ponto de máximo ou mínimo local $p \in S$ então $\operatorname{grad} f(p) = 0$

## (c) Derivada covariante de campos tangentes a $S$

Inspirado na discussão do $\operatorname{grad} f(p)$ podemos nos perguntar: *Dados campos $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ tangentes a $S$ como derivar $\vec{X}$ na direção de $\vec{Y}$ de forma que o resultado continue tangente a $S$?* Afinal mesmo os 2 campos sendo tangente, $(D\vec{X})\vec{Y}$ pode não ser tangente a $S$. A solução será considerar a parte tangente de $(D\vec{X})\vec{Y}$

Definimos então a nova derivada como:

$$\boxed{\nabla_Y \vec{X}(p) = D\vec{X}(p)Y - \left\langle (D\vec{X}(p)Y), \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|} \right\rangle \frac{\nabla g(p)}{\|\nabla g(p)\|}}$$

## (d) Conceito de Hessiano Riemanniano (ou intrínsico)

Uma vez que sabemos derivar campos $\vec{X}$ tangentes a $S$, podemos derivar o $\operatorname{grad} f$, definindo o conceito do Hessiano intrínsico ou Riemanniano $\mathcal{H}(p)$.

$$\boxed{\mathcal{H}(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle, \; X, Y \in T_pS}$$

**Prop 2:** Seja $p \in S$, com $\operatorname{grad} f(p) = 0$.

- Se $\mathcal{H}(p)$ é positivo definido (i.e., tenha auto-valores positivo). então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $\mathcal{H}(p)$ é negativo definido (i.e., tenha auto-valores negativos). então $p \in S$ é ponto de máximo local.

**(e) De volta a discussão extrínsica**

Usando a definição de $\mathcal{H}$ concluimos que $\forall X, Y \in T_pS$

$$\mathcal{H}(p)(X,Y) = \mathrm{Hess\,u}(p)(X,Y) - \langle \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}(p), \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}(p) \rangle \mathrm{Hess\,g}(X,Y)$$

No caso em que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$, notamos que
$H|_{T_pS \times T_pS} = \mathcal{H}(p)$

Assim podemos reformular a Prop 2 da seguinte maneira:

**Prop 3** Seja $p \in S$ tal que $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$.

- Se $H|_{T_pS \times T_pS}$ é positivo definido, então $p \in S$ é ponto de mínimo local.
- Se $H|_{T_pS \times T_pS}$ é negativo definido então $p \in S$ é ponto de máximo local.

**(f) Matriz orlada:** A próxima proposição de Algebra Linear pode ser demonstrada usando a matriz apresentada na motivação, o teorema espectral e a lei de inércia de Sylvester

**Prop 4:** Seja $A$ matriz simétrica, $w$ um auto vetor e $V$ o espaço perpendicular a $w$. Suponha que $w_1 \neq 0$.

- Se $\det \overline{A}_2 < 0$ e $\det \overline{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é positivo definido.
- Se $\det \overline{A}_2 > 0$ e $\det \overline{A}_3 < 0$ então $y^t A x|_{V \times V}$ é negativo definido.

$$\overline{A}_3 = \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ w_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & A_{11} & A_{12} \\ w_2 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

## (g) Observações finais

Proposições 3 e 4 implicam o Teorema.

Observamos também que as vezes $H$ pode ser expresso com outra notação. De fato, seja $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função defina $L(x, \lambda) = u(x) - \lambda(g(x) - c)$. Então

$$\nabla L(x, \lambda) = (\nabla u(x) - \lambda \nabla g(x), g(x) - c)$$

Se $\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$ e então $H$ coincide com a matriz $3 \times 3$ esquerda superior de $\mathrm{Hess}\, \mathrm{L}(p, \lambda)$.