

CINEMÁTICA RELATIVÍSTICA

FÍSICA IV

O meio em que a luz se propaga

Como já vimos, no início do Século XIX, a experiência de Young pôs por terra a teoria corpuscular de Newton. Comprovada a noção de que a luz é uma onda, surgiu uma dúvida fundamental que persistiu por quase cem anos. Na época, já se entendia a física das ondas mecânicas. Sabia-se que tais ondas resultam de deformações em um meio, que pode ser líquido, sólido ou gasoso.

Num tanque de água, por exemplo, no estado de equilíbrio, o nível do líquido é uniforme. Se alguma perturbação elevar o nível num ponto P , a força da gravidade e o empuxo da água ao redor de P puxarão o excesso de fluido para baixo. A força de reação ao empuxo empurrará para cima a água em torno de P para cima e provocará novas forças em uma região um pouco mais distante. O resultado será uma ondulação que se propagará na superfície do tanque.

Quando Young demonstrou que a luz era uma ondulação, Maxwell nem havia nascido, e os cientistas da época entenderam que a luz resultava de deformações em um meio que se espalhava por todo o universo. Tinha de ser assim, porque a Terra recebia luz de estrelas distantes. Fazia-se contraste com o som: como este se propaga no ar, cuja densidade diminui rapidamente com a altura, os sons aqui produzidos não conseguem escapar da atmosfera terrestre, e ruídos produzidos em outros planetas não chegam até nós. Já a luz produzida no Sol e outras estrelas e a luz refletida pela Lua e pelos planetas atravessa o espaço vazio. Tudo indicava, portanto, que o meio misterioso estava em toda parte.

Apesar disso, ele não podia exercer atrito sobre a Terra, a Lua, planetas ou cometas, já que, como Newton demonstrara, a força gravitacional descreve precisamente as órbitas. O meio deveria ser intangível. Por isso, foi chamado de *éter*. Por algum tempo, pensou-se que uma parte dele fosse arrastado e acompanhasse os movimentos da Terra e dos demais corpos espaciais, da mesma forma que o movimento de uma bola de tênis arrasta uma casca esférica de ar.

Essa hipótese acabou refutada. Se houvesse uma camada de éter em torno da Terra, as observações astronômicas deveriam ser afetadas pelo desvio da luz ao passar do éter estacionário que preenchia o espaço para o que se movia junto com a Terra, mas esse desvio nunca foi observado.

Décadas mais tarde, quando Maxwell mostrou que a luz é uma radiação eletromagnética e que sua velocidade está associada às constantes ϵ_0 e μ_0 , pareceu claro que essas constantes estavam associadas a propriedades do éter, assim como a velocidade de uma onda numa corda está associada à densidade da corda e à tensão a que ela é submetida. Deveria haver um sistema de referências privilegiado, no qual o éter

estaria em repouso. Os corpos celestes estariam em movimento nesse meio.

O interferômetro de Michelson e Morley

Em cada momento, conseqüentemente, a Terra teria uma velocidade absoluta. Medir essa velocidade passou a ser um desafio científico importantíssimo. Os físicos americanos Albert Michelson e Edward Morley o aceitaram e construíram o interferômetro desenhado na figura 1. Na versão moderna do aparelho, a luz provém do laser representado por um retângulo no lado esquerdo do diagrama. O espelho no meio da figura é semitransparente.

Quando o feixe luminoso o atinge, parte dele é refletida para cima, sobe até alcançar o espelho horizontal no topo da figura, é refletido de volta e atravessa o espelho semitransparente para alcançar a tela horizontal, no extremo inferior do desenho.

O restante do feixe provindo do laser atravessa o espelho semitransparente, volta ao ser refletido pelo espelho vertical no extremo direito e é finalmente refletido pelo espelho semitransparente em direção à tela.

Esta última, como podemos ver, recebe dois feixes luminosos, que interferem. A interferência pode ser construtiva ou destrutiva, dependendo da diferença entre os caminhos óticos. Nas condições da figura, os dois caminhos óticos compreendem dois trechos que são percorridos pelos dois feixes: do laser até o espelho semitransparente e do espelho semitransparente até a tela de projeção. Vamos chamar de ℓ a soma desses dois percursos. Uma vez que os feixes correm no ar, o caminho ótico total do feixe que subiu e foi refletido pelo espelho horizontal é

$$\ell_a = \ell + 2a. \quad (1)$$

Já o caminho ótico do feixe que atravessa o espelho semitransparente e é refletido pelo espelho vertical é

$$\ell_b = \ell + 2b. \quad (2)$$

A diferença entre os caminhos óticos é

$$\Delta\ell = 2(a - b). \quad (3)$$

Se a diferença for um múltiplo inteiro (positivo, nulo ou negativo) do comprimento de onda, a interferência será construtiva. O espelho superior na figura é móvel: pode ser deslocado para cima ou para baixo, e isso permite ajustar a diferença $a - b$ para que a interferência seja construtiva.

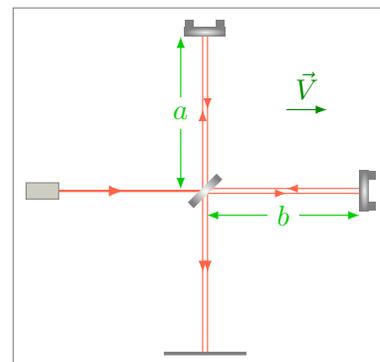
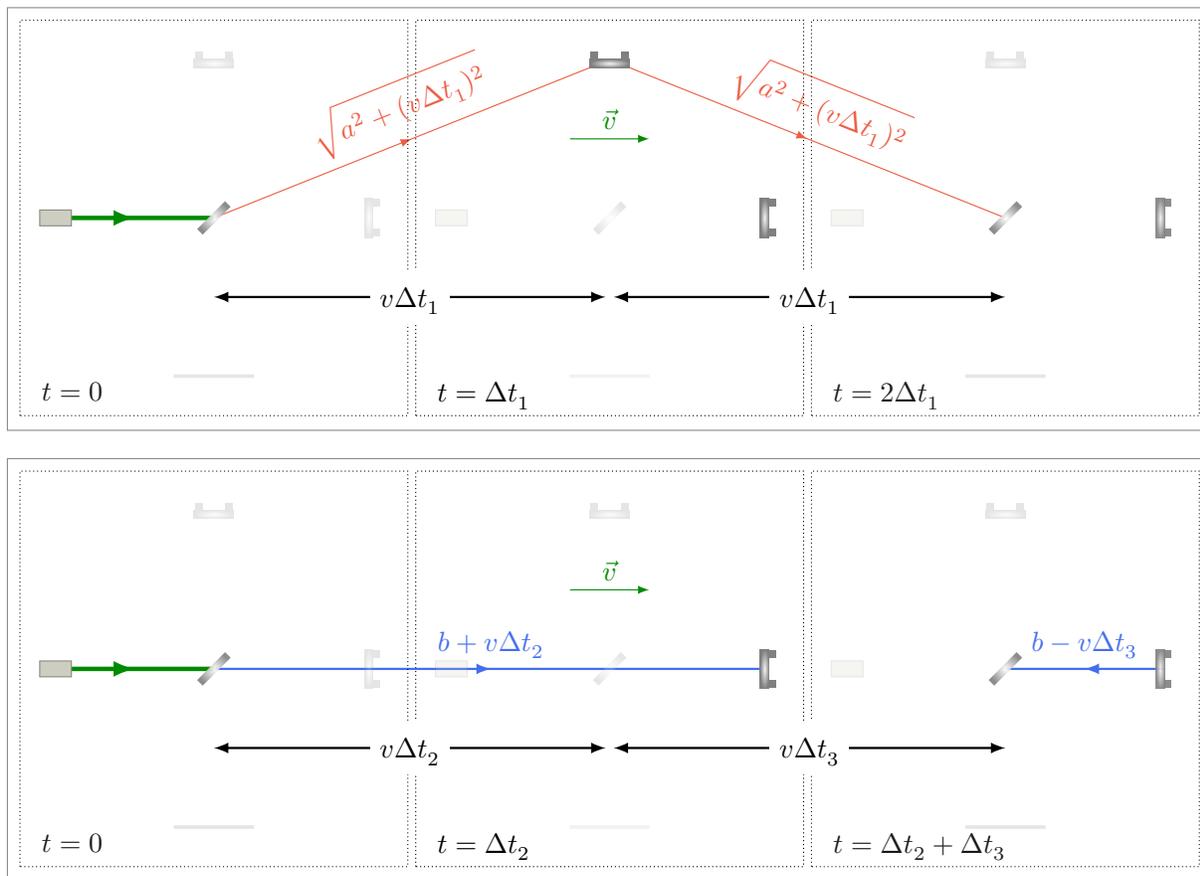


Figura 1: Desenho esquemático do interferômetro construído por Michelson e Morley. O aparelho flutuava sobre mercúrio, num tanque, e podia ser rodado em torno de um eixo perpendicular à figura.

O interferômetro em movimento

O cálculo dos caminhos óticos na seção anterior tomou por base um interferômetro em repouso. Na prática, porém, o interferômetro está em movimento, porque a Terra tem velocidade orbital de aproximadamente 30 km/s em relação a um sistema de coordenadas localizado no Sol. É verdade que a velocidade do Sol em relação ao éter é desconhecida, e, por isso, ninguém sabe qual é a velocidade absoluta da Terra.



Sabemos, entretanto, que essa velocidade muda ao longo do ano, à medida que a Terra percorre sua órbita. Assim, mesmo que a velocidade absoluta num certo momento seja nula, ela terá módulo de $c/10\,000$ ou mais em outros dias do ano. Esse valor é suficientemente grande para ser medido por um interferômetro como o da figura 1.

A figura 2 mostra, esquematicamente, os caminhos óticos dos dois raios em que se divide a luz proveniente do laser ao passar pelo espelho semitransparente. O interferômetro foi orientado de forma que o braço horizontal na ilustração aponta na direção em que a Terra se

Figura 2: Movimento do interferômetro de Michelson e Morley. O painel superior mostra três instantâneos do interferômetro, para $t = 0$, $t = \Delta t_1$ e $t = 2\Delta t_1$, onde $2\Delta t_1$ é o tempo necessário para o raio de luz refletido para cima pelo espelho semitransparente chegar de volta no mesmo espelho após ser refletido pelo espelho horizontal no topo. O painel inferior mostra três instantâneos do interferômetro, para $t = 0$, $t = \Delta t_2$ e $t = \Delta t_2 + \Delta t_3$, onde $\Delta t_2 + \Delta t_3$ é o tempo necessário para o raio de luz que atravessa o espelho semitransparente chegar de volta no mesmo espelho após ser refletido pelo espelho vertical no extremo direito do interferômetro. Para facilitar a visualização, a escala horizontal da figura foi enormemente ampliada, e apenas os espelhos que refletem o raio que sobe aparecem com nitidez no painel de cima. No painel de baixo, somente os espelhos que refletem o raio horizontal são desenhados com nitidez.

move, com velocidade absoluta v .

O painel de cima na figura mostra o trajeto do raio que é defletido pelo espelho semitransparente em direção ao espelho horizontal. O caminho ótico do trecho indicado é

$$c2\Delta t_1 = 2\sqrt{a^2 + (v\Delta t_1)^2}. \quad (4)$$

Para determinar Δt_1 , precisamos quadrar a Eq. (4). Resulta que

$$c^2(\Delta t_1)^2 = a^2 + v^2(\Delta t_1)^2 \quad (5)$$

e, portanto, que

$$2c\Delta t_1 = 2\frac{a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

Para $v = 0$, esse resultado se reduz a $2c\Delta t_1 = 2a$, em acordo com a Eq. (1).

O painel de baixo na figura 2 mostra o trajeto do raio que atravessa o espelho semitransparente. O caminho ótico, agora, é $c(\Delta t_2 + \Delta t_3)$, onde

$$c\Delta t_2 = b + v\Delta t_2, \quad (7)$$

e

$$c\Delta t_3 = b - v\Delta t_3. \quad (8)$$

Da Eq. (7), obtemos Δt_2 e da Eq. (8), Δt_3 . Somados os dois resultados, encontramos que

$$c(\Delta t_2 + \Delta t_3) = 2\frac{b}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9)$$

O lado direito se reduz a $2b$ para $v = 0$, em acordo com a Eq. (2).

Para $v = 0$, se os braços do interferômetro forem iguais, isto é, se $a = b$, os caminhos óticos nas Eqs. (6) e (9) serão iguais. Para $v \neq 0$, porém, o segundo caminho ótico é maior do que o primeiro, por um fator $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$. Assim, se um dos braços do interferômetro for orientado na direção da velocidade absoluta da Terra, o padrão de interferência na tela de projeção mostrará que os caminhos óticos são diferentes.

Por meio desse procedimento, Michelson e Morley esperavam poder detectar a velocidade absoluta da Terra com erro estimado em 10 km/s. O resultado da experiência, realizada em 1887, frustrou suas expectativas. A velocidade absoluta da Terra resultou zero, dentro do erro experimental, ao longo de meses de medida. Dito de outra forma,

a situação experimental era melhor descrita pela figura 1 do que pela figura 2.

Podia-se concluir que, no sistema referencial da Terra, a velocidade da luz coincide com a prevista pelas equações de Maxwell: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Em outras palavras, o éter, que se espalha por todo o universo, não fica parado: ele acompanha o movimento da Terra. Isso parece estranho. Significa que, se um marciano pudesse apreciar o trabalho dos dois americanos, seria levado a concluir que, num referencial fixo em Marte, a velocidade da luz é diferente de $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. O marciano teria de aceitar que o referencial privilegiado, no qual as equações de Maxwell são válidas, não está preso ao centro de massa do universo. Em lugar disso, ele está centrado na Terra.

1. A contração de Lorentz

O físico holandês Hendrik Lorentz percebeu que o resultado de Michelson e Morley poderia ser interpretado de outra forma, que dispensava a noção de um referencial privilegiado. Discutiremos mais adiante a proposta de Lorentz, mas já temos condições de entender um aspecto dela.

Digamos que um corpo tem dimensões L_x^0 , L_y^0 e L_z^0 e é posto a se mover na direção de x com velocidade v . Se admitirmos que o movimento encurta a dimensão L_x , de forma que o comprimento passe a ser

$$L_x^v = L_x^0/\gamma, \quad (10)$$

onde

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11)$$

veremos que o resultado da experiência de Michelson e Morley tinha, necessariamente, de ter resultado negativo.

De fato, como já vimos, se os braços do interferômetro tiverem o mesmo comprimento $a = b$, o caminho ótico ao longo do braço horizontal, dado pela Eq. (9) é γ vezes maior do que o caminho ótico ao longo do braço vertical, dado pela Eq. (6). Assim, se b diminuir com a velocidade, de forma que $b = a \rightarrow b = a/\gamma$, os caminhos óticos se tornarão iguais; nessas condições, o padrão projetado na tela na parte de baixo da figura 1 se tornará independente da velocidade v , e o resultado da experiência será sempre negativo.

O postulado de Einstein

Em 1905, quase vinte anos após a Michelson e Morley divulgarem seus resultados, a comunidade científica estava convencida de que o resultado negativo da experiência evidenciava fenômenos mecânicos que somente apareciam para velocidades grandes, comparáveis com a velocidade da luz. Não havia descrição unificada desses fenômenos, e as discussões envolviam hipóteses que pareciam artificiais.

Nesse ano, Albert Einstein propôs uma formulação que generalizava ideias que vinham do tempo de Galileu e Newton. Para defendê-la, ele mostrou que, além de explicar os resultados de Michelson e Morley, a generalização esclarecia as dúvidas que a discussão do trabalho dos americanos gerara.

Na formulação da mecânica newtoniana, todos os sistemas de referências em movimento uniforme são **equivalentes**.¹ As leis de Newton descrevem o movimento de uma partícula em qualquer um desses sistemas.

A noção de que existe um sistema privilegiado ancorado no éter está em conflito com o conceito implantado no Século XVII. Sob essa ótica, podemos ver a experiência de Michelson e Morley como um assalto à estrutura por ele construída. Como o resultado da experiência foi negativo, a estrutura saiu fortalecida, e Einstein se mobilizou para defender suas bases.

Einstein se afezrou à noção de que os referenciais inerciais, isto é, em movimento uniforme, são equivalentes. Em particular, as equações de Maxwell deveriam descrever os campos elétrico e magnético em qualquer um desses referenciais. Como a igualdade $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ decorre das equações de Maxwell, Einstein postulou que a velocidade da luz, no vácuo é c em qualquer sistema inercial.

O postulado nos convida a descrever a experiência de Michelson e Morley referencial de seu laboratório, no qual o interferômetro está parado. Nessas condições, aplica-se a análise da *O interferômetro de Michelson e Morley*, quer a velocidade da Terra seja grande ou pequena. Se os braços a e b forem iguais, a interferência será sempre construtiva, e a experiência não dará nenhuma informação sobre a velocidade da Terra.

Na visão de Einstein, os fenômenos eletromagnéticos são análogos aos mecânicos. Assim como o passageiro de um avião comercial, sem olhar para fora, não tem como avaliar a velocidade do aeroplano, os passageiros do planeta Terra não têm como determinar a velocidade do planeta com base numa medida no interior de um laboratório. O resultado negativo de Michelson e Morley somente mostra que a ex-

¹ A equivalência não cobre sistemas acelerados; para validar a segunda lei de Newton, por exemplo, é necessário introduzir forças inerciais.

periência foi bem feita. O resultado não poderia ser outro.

Relatividade do tempo

Exigir que as leis de Newton valham em qualquer referencial inercial não traz nenhuma consequência surpreendente. Exigir que a velocidade da luz seja a mesma em todos os referenciais inerciais, ao contrário, tem implicações que, à primeira vista, parecem paradoxais.

A figura 3 descreve uma situação imaginária proposta por Einstein. A ilustração mostra um ônibus que se move com velocidade \vec{v} , tal que v seja pouco menor do que c . No teto, exatamente na metade do veículo, está uma lâmpada, que se acende no instante $t = 0$. Nesse momento, a origem de um sistema de referências $x'y'$ fixo no ônibus coincide com a do sistema de laboratório xy , fixo na beira da estrada. Depois de algum tempo, a luz emitida pela lâmpada alcança a frente e a traseira da cabine do ônibus.

Podemos analisar o movimento da luz nos dois sistemas. No sistema $x'y'$, do ônibus, o feixe de luz emitido para a frente avança com velocidade c e o emitido para trás corre com velocidade $-c$. Nesse referencial, a frente do ônibus está parada na posição $x' = L$, e a traseira está parada na posição $x' = -L$. Depois de um tempo $\tau = L/c$, os dois raios de luz alcançam as duas paredes, simultaneamente. A figura 4 mostra, graficamente, a evolução dos dois raios.

Os pontos A , B e C na figura retratam três *eventos*. Um evento é uma ocorrência numa dada posição (espaço) num certo instante (tempo). O evento A é a saída dos raios de luz da lâmpada no teto do ônibus. O evento B é a chegada de um dos raios na parede frontal do veículo. O evento C é a chegada na parede traseira. O evento A ocorre na origem, no instante $t' = 0$. Os outros dois eventos ocorrem em posições distintas, mas são simultâneos: os pontos B e C estão sobre uma mesma horizontal, na figura.

No sistema xy , o feixe emitido para a frente ainda viaja com velocidade c , e o emitido para trás, com velocidade $-c$. Em função do tempo, as posições dos feixes são $x = \pm ct$, portanto. Agora, porém, a frente e a traseira do ônibus avançam com velocidade v . Como a frente estava, inicialmente, em $x_F = L$, sua posição é dada pela igualdade

$$x_F(t) = L + vt. \quad (12)$$

No instante t_F em que a luz chega na parede frontal do ônibus, o lado direito da Eq. (12) é igual a ct_F :

$$L + vt_F = ct_F, \quad (13)$$

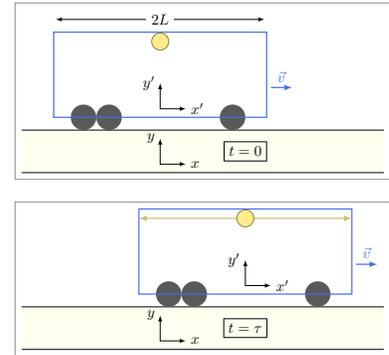


Figura 3: Experiência imaginária, proposta por Einstein. Um ônibus se move com velocidade \vec{v} , com módulo comparável a c . No painel superior ($t = 0$), uma lâmpada fixa no teto do ônibus, exatamente no ponto médio entre a frente e a traseira, acaba de ser acesa. No painel inferior ($t = \tau$), os raios de luz acabam de alcançar a parede da frente e a de trás. O sistema de referências xy está fixo no solo, à beira da estrada, enquanto o sistema $x'y'$ se move junto com o ônibus. No instante $t = 0$ as origens dos dois sistemas coincidem.

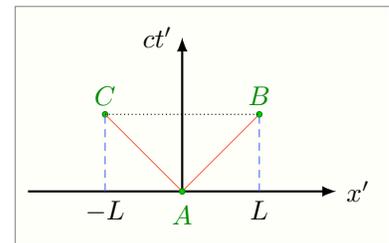


Figura 4: Evolução dos raios luminosos emitidos pela lâmpada na figura 3, no sistema $x'y'$. Para facilitar a visualização, o tempo foi multiplicado por c no eixo vertical; assim, as equações $x' = \pm ct'$ são representadas por retas inclinadas de $\pm 45^\circ$.

e resulta que

$$t_F = \frac{L}{c - v}. \quad (14)$$

O tempo t_F é maior do que L/c porque, no referencial xy , a parede frontal foge do raio de luz.

Analogamente, encontramos o tempo de colisão para a parede traseira:

$$t_T = \frac{L}{v + c}, \quad (15)$$

que é menor do que L/c porque a parede traseira do ônibus corre ao encontro do raio de luz.

A figura 5 mostra em gráfico as posições dos raios de luz e das paredes do ônibus, em função do tempo, no sistema xy . Como na figura 4, o evento A ocorre na origem, em $t = 0$. Os dois outros eventos ocupam posições distintas e são *assíncronos*, isto é, ocorrem em tempos diferentes. Isso está em acordo com as Eqs. (14) e (15), que têm lados direitos diferentes.

Esse exemplo mostra que eventos simultâneos num sistema de referências podem ser assíncronos em outro. Essa discrepância é uma novidade, nunca encontrada na mecânica newtoniana. Ela decorre diretamente das equações de Maxwell, quando se aceita que referenciais inerciais são equivalentes. Dito de outra forma, ela decorre imediatamente do postulado de Einstein.

A noção de que a velocidade da luz (no vácuo) é uma constante universal, que não depende do sistema de referências, é incompatível com a noção de tempo absoluto. Quem aceita que a velocidade da luz é a mesma em qualquer sistema de referências deve abrir mão do conceito de tempo absoluto. Reciprocamente, aceitar que o tempo é absoluto exige permitir que a velocidade da luz varie de referencial para referencial.

Separação entre eventos

O universo tem três dimensões espaciais, mas quando uma partícula se move, a direção do movimento se torna especial. Por isso, vamos considerar, aqui, apenas uma dimensão espacial, que continuaremos a chamar de x .

Nessas condições, voltamos à questão da luz emitida pela lâmpada no teto do ônibus. Como vimos ao discutir as figuras 4 e 5, o evento A tem coordenadas zero nos referenciais de laboratório e móvel. Os eventos B e C têm coordenadas não nulas. Entretanto, como eles são definidos pela chegada de raios de luz, emitidos pela lâmpada, nas

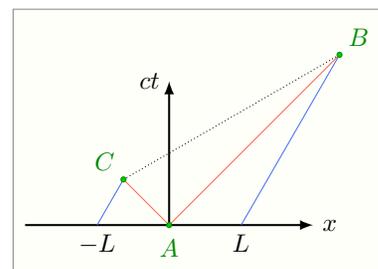


Figura 5: Evolução dos raios luminosos emitidos pela lâmpada na figura 3, no sistema xy .

paredes do ônibus, satisfazem às igualdades

$$x_B = ct_B, \quad (16)$$

$$x'_B = ct'_B, \quad (17)$$

$$x_C = -ct_C \quad (18)$$

e

$$x'_C = ct'_C. \quad (19)$$

Se elevarmos cada uma dessas quatro equações ao quadrado, ficaremos com dois resultados. As Eqs. (16) e (18) podem ser reunidas na forma

$$x^2 = (ct)^2, \quad (20)$$

enquanto as Eqs. (17) e (19) podem ser escritas de como uma só na forma

$$x'^2 = (ct')^2. \quad (21)$$

Podemos agora subtrair a Eq. (20) da Eq. (21). O resultado é

$$x^2 - x'^2 = (ct)^2 - (ct')^2. \quad (22)$$

Separamos agora os termos definidos no referencial de laboratório dos definidos no referencial móvel, para ver que

$$-(ct)^2 + x^2 = -(ct')^2 + x'^2. \quad (23)$$

Essa igualdade entre grandezas definidas em referenciais distintos encontra uma análoga na geometria analítica. A figura 6 define a questão geométrica. A posição do ponto P pode ser descrita pelos dois sistemas de coordenadas desenhados na ilustração. No sistema representado pelos eixos **vermelhos** o ponto P tem coordenadas x e y . No sistema representado pelos eixos **azuis**, o mesmo ponto tem coordenadas x' e y' . A distância do ponto P até a origem tem de ser a mesma nos dois sistemas, o que significa que

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \quad (24)$$

A Eq. (24) pode também ser obtida da transformação de coordenadas que mapeia o sistema **vermelho** no sistema **azul**:

$$\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \quad (25)$$

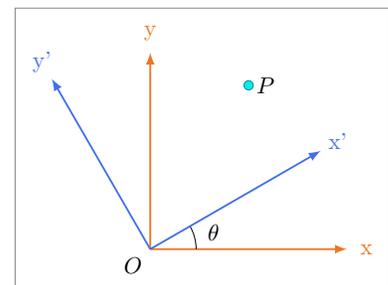


Figura 6: Preservação da distância na mudança de coordenadas.

onde θ é o ângulo entre os eixos das abscissas (ou entre os eixos das ordenadas) nos dois sistemas.

Para derivar a Eq. (24), começamos por transpor a Eq. (25). A equação transposta é

$$\begin{bmatrix} y' & x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Podemos agora multiplicar a Eq. (26) pela Eq. (25) para obter a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (27)$$

ou, após efetuar o produto matricial à esquerda e o produto entre a segunda e a terceira matrizes à direita,

$$\begin{bmatrix} (y')^2 + (x')^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad (28)$$

A matriz do meio à direita é a identidade. Assim, é fácil efetuar os dois produtos indicados para obter o resultado que queríamos:

$$\begin{bmatrix} (y')^2 + (x')^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y)^2 + (x)^2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Conceitualmente, os problemas definidos pela comparação entre as figuras 4 e 5 e pela figura 6 são equivalentes. Nos dois casos, sabemos as coordenadas de um ponto num sistema e queremos encontrar as coordenadas do mesmo ponto em outro sistema. A equação matricial (25) resolve o problema geométrico na figura 6. Podemos tentar encontrar uma relação semelhante entre os eventos nas figuras 4 e 5.

Nosso ponto de partida, naturalmente, deve ser uma comparação entre as Eqs. (23) e (24). As duas igualdades são semelhantes. Entretanto, os dois primeiros termos dos dois lados na Eq. (23) são negativos, enquanto todos os termos na Eq. (24) são positivos. Para torná-las idênticas, devemos adotar as transcrições $y \rightarrow ict$ e $y' \rightarrow ict'$, de forma que $y^2 \rightarrow -c^2t^2$ e $y'^2 \rightarrow -c^2t'^2$.

Com essas transcrições, a Eq. (25) assume a forma

$$\begin{bmatrix} ict' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ict \\ x \end{bmatrix}, \quad (30)$$

onde α é uma variável a ser determinada.

Se aplicarmos à Eq. (30) as manipulações algébricas que nos conduziram da Eq. (25) à Eq. (29), acabaremos por derivar a Eq. (23). Em tese, nosso problema está resolvido, mas falta encontrar o ângulo α .

Quando se efetua o produto, a equação matricial (30) se desdobra em duas. Como há somente uma incógnita (α), precisamos apenas de x' (ou t') numa situação em que x e t são dados.

Felizmente, há uma situação física simples em que conhecemos as variáveis de que precisamos. Suponhamos que um observador no referencial de laboratório na figura 3 acompanhe o movimento da origem do relatório móvel. Para o observador, a origem avança com velocidade v . Como ela está na origem do referencial de laboratório em $t = 0$, sua posição é dada pela igualdade

$$x = vt. \quad (31)$$

No referencial móvel, a origem está sempre na posição

$$x' = 0. \quad (32)$$

Com essas informações, podemos encontrar a variável α . Efetuamos o produto matricial à direita na Eq. (30); resulta que

$$\begin{bmatrix} ict' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ict \cos \alpha - x \sin \alpha \\ ict \sin \alpha + x \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (33)$$

A igualdade entre a linha de baixo à esquerda e a linha de baixo à direita envolve as variáveis x' , x e t , além da incógnita α . Substituímos nela os lados direitos das Eqs. (31) e (32) para encontrar a expressão

$$0 = ict \sin \alpha + vt \cos \alpha, \quad (34)$$

ou seja

$$\tan \alpha = i \frac{v}{c}. \quad (35)$$

Recorremos agora às identidades trigonométricas $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ e $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$ para encontrar que

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (36)$$

e

$$\sin \alpha = i \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (37)$$

O lado direito da Eq. (36) é o fator γ que encontramos na Eq. (11), ao discutir o trabalho de Lorentz. Para simplificar o lado direito da Eq. (37), define-se outra grandeza adimensional:

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (38)$$

Com essas definições, as Eqs. (36) e (37) ficam mais curtas:

$$\cos \alpha = \gamma \quad (39)$$

e

$$\operatorname{sen} \alpha = i\beta\gamma, \quad (40)$$

e a Eq. (33) assume a forma

$$\begin{bmatrix} ict' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ict\gamma - ix\beta\gamma \\ -ct\beta\gamma + x\gamma \end{bmatrix}. \quad (41)$$

A unidade imaginária aparece em todos os termos na primeira linha da Eq. (41) e pode ser eliminada. A igualdade matricial que sobra pode ser reescrita na forma da Eq. (30):

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}. \quad (42)$$

A Eq. (42) foi obtida por Lorentz, antes do trabalho de Einstein. Lorentz chegou a esse resultado ao procurar uma transformação de coordenadas que mantivesse a forma das equações de Maxwell, isto é, tal que, expressas nas variáveis x' e t' as equações de Maxwell mantivessem a forma que tinham nas variáveis x e t . Por isso, a Eq. (42) é conhecida como *transformação de Lorentz*.

A generalização para três dimensões é muito simples:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Em suma, somente a coordenada x , paralela à velocidade, é afetada. As outras duas, perpendiculares à velocidade, permanecem intactas.

Funções hiperbólicas

A transformação de Lorentz pode ser escrita de forma mais simples. Para isso, dada a velocidade v do referencial móvel, é suficiente definir a variável adimensional a pela relação

$$\tanh(a) \equiv \frac{v}{c}, \quad (44)$$

e, sabendo que $v/c = \beta$, podemos também escrever que

$$\tanh(a) = \beta. \quad (45)$$

A identidade $\cosh(u) = 1/\sqrt{1 - \tanh^2(u)}$ nos conduz, imediatamente da Eq. (44) à igualdade

$$\cosh(a) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (46)$$

e a comparação com a Eq. (11) mostra que

$$\cosh(a) = \gamma. \quad (47)$$

Por outro lado, $\sinh(a) = \tanh(a) \cosh(a)$, e disso vemos que

$$\sinh(a) = \beta\gamma. \quad (48)$$

Todos os termos que integram a matriz 2×2 que define a transformação de Lorentz são, portanto, funções hiperbólicas de a . Explicitamente, temos que

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}. \quad (49)$$

A Eq. (49) é semelhante à Eq. (25), que descreve rotações de sistemas de coordenadas espaciais. O tempo t é uma coordenada análoga a x , y ou z . Entretanto, ele tem propriedades diferentes. Por isso, enquanto as rotações espaciais são descritas por funções trigonométricas, a transformação (49), que descreve mudanças de velocidade, é descrita por funções hiperbólicas.

Essa discrepância entre o tempo e as dimensões espaciais tem origem na diferença entre as Eqs. (23) e (24). Na primeira, o sinal dos primeiros termos à esquerda e à direita, que envolvem o tempo, é negativo, enquanto o sinal dos segundos termos, que envolvem a dimensão espacial, é positivo. Já na Eq. (24), todos os termos estão associados a coordenadas espaciais e todos são positivos.

Matematicamente, a variável t se comporta como se fosse uma variável espacial multiplicada pela unidade imaginária, como na Eq. (30). Como vimos, os fatores i podem ser eliminados, mas mesmo assim as equações que envolvem o tempo são diferentes, porque as funções trigonométricas são convertidas em funções hiperbólicas.

2. O espaço-tempo.

Antes mesmo de a ciência começar a se desenvolver, já se sabia que vivemos em um espaço constituído por três dimensões. As três são mutuamente equivalentes. A altura parece diferente das dimensões horizontais porque vivemos no campo gravitacional da Terra. Isso considerado, vemos que a direção vertical equivale a qualquer direção horizontal.

O trabalho de Einstein estendeu para quatro o número de dimensões. O conjunto é assimétrico, porque, embora análoga, a quarta dimensão é diferente das três demais. O espaço quadridimensional é conhecido como *espaço-tempo*.

Se mantivermos em mente a noção de que o espaço-tempo é

análogo ao espaço, será fácil entender resultados da teoria de Einstein que, à primeira vista, parecem paradoxais. Vimos, por exemplo, que dois eventos podem ser simultâneos em um sistema de referências e assíncronos em outro.

Esse desencontro nada mais é do que o análogo, no domínio do tempo, de uma propriedade geométrica bem conhecida: quando se olham dois objetos sob uma certa perspectiva, um deles pode estar à frente do outro. Num cinema, por exemplo, a cabeça do espectador a sua frente pode bloquear sua visão da tela. Sob essa ótica, a posição da cabeça parece coincidir com a do personagem na tela. Entretanto, se você deslocar sua cabeça para a direita ou para a esquerda, a coincidência será eliminada, e as posições passarão a ser distintas.

Comparada com a Eq. (42), a Eq. (49) é mais conveniente para deduções matemáticas, porque permite que exploremos identidades tais como a relação $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$. A próxima seção oferece um exemplo.

A transformação inversa

Dadas as coordenadas x e t de um evento no referencial de laboratório, a transformação de Lorentz permite encontrar as coordenadas x' e t' do mesmo evento no referencial móvel. Em muitas situações, estamos interessados no problema inverso, de calcular x e t a partir de x' e t' .

Fisicamente, o problema parece simples. O referencial móvel tem velocidade v em relação ao de laboratório. Segue que, visto do referencial móvel, o referencial de laboratório tem velocidade $-v$. Esperamos, portanto, que a transformação que leva x', t' em x, t possa ser obtida da Eq. (42), ou da Eq. (49), pela simples troca de v por $-v$. Vejamos se a matemática confirma.

Para isso, começamos por multiplicar a Eq. (49) pelo inverso da matriz 2×2 à direita:

$$\begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}. \quad (50)$$

O primeiro produto matricial no lado direito é, por definição de matriz inversa, a matriz identidade. Assim, a Eq. (50) se reduz a uma expressão da forma que desejamos:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} \quad (51)$$

Resta encontrar a inversa da matriz de transformação. Isso, felizmente, é simples.

3. Inversa de matriz 2×2

A inversa de uma matriz $N \times N$ é a transposta de sua cofatora dividida pelo determinante da matriz.

Para obter a cofatora de uma matriz 2×2 , basta trocar as posições dos dois elementos na diagonal principal e trocar as posições e os sinais dos dois elementos na diagonal secundária.

A transposição da cofatora repõe os elementos da diagonal secundária nas posições originais, com os sinais trocados. Assim, no caso genérico de uma matriz \mathcal{M} com elementos p, q, r e t , temos que

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ps - qr} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}, \quad (52)$$

desde que $\det(\mathcal{M}) = ps - qr \neq 0$.

Precisamos encontrar o determinante da matriz 2×2 na Eq. (51) e, depois, a transposta de sua cofatora. O determinante da matriz de transformação é unitário, pois

$$\det \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} = \cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1. \quad (53)$$

A Eq. (52) conduz, portanto, imediatamente, ao resultado

$$\begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix}, \quad (54)$$

e a Eq. (51) assume a forma

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Em palavras, a transformação que dá x e t a partir de x' e t' é idêntica à que dá x' e t' a partir de x e t , exceto pelo sinal de $\sinh(a)$. Dado que a função seno hiperbólica é ímpar, podemos também dizer que as transformações são idênticas, exceto que o sinal de a é invertido. E como a função tangente hiperbólica também é ímpar, a Eq. (45) nos diz que, para obter a inversa da transformação de Lorentz, precisamos apenas inverter o sinal da velocidade. Isso é, precisamente, o que esperávamos.

Em resumo, a Eq. (49) [ou a igualdade equivalente (42)] descreve a mudança de coordenadas, de um sistema de referências inercial para

outro, em qualquer situação. Dado um referencial xt e outro $x't'$, queremos conhecer as coordenadas de um evento no segundo a partir das coordenadas do mesmo evento no primeiro. O parâmetro a é determinado pela velocidade do segundo referencial em relação ao primeiro. Caso a velocidade seja negativa, o parâmetro será negativo e a transformação de Lorentz equivale ao inverso da transformação com velocidade positiva, como seria de se esperar.

Contração espacial

Vejamos, agora, aplicações da transformação de Lorentz. Como primeiro exemplo, vamos estudar o problema de medir-se o comprimento de um objeto em movimento. Medir o tamanho de corpos em movimento com velocidades baixas, muito menores do que a da luz, é relativamente fácil.

Suponhamos, por exemplo, que você queira medir o comprimento de uma bicicleta e sabe que ela vai passar frente a um paredão numa determinada rua larga. Antes de mais nada, você pinta uma sequência de marcas numeradas na parede, espaçadas de 1 cm, de maneira que a parede pareça uma régua. Em seguida, você atravessa a rua e, com o celular pronto, encosta-se na parede oposta ao paredão e espera a bicicleta passar. Quando ela passa, tira uma foto que mostra a bicicleta inteira, frente ao paredão. Para determinar o comprimento da bicicleta, basta agora encontrar a distância entre a marca onde aparece a frente do pneu dianteiro da bicicleta e a marca onde aparece a parte de trás do pneu traseiro. Dá um pouco de trabalho, mas uma pessoa sozinha dá conta do recado.

Se a velocidade da bicicleta for comparável com a da luz, esse procedimento funciona mal. Enquanto os raios de luz saem dela para chegar à câmera do celular, a bicicleta avança uma distância apreciável, e você não pode ter certeza de que o raio que saiu da frente levou o mesmo tempo que o raio que saiu de trás para chegar aos sensores do celular. Se o tempo para o raio vir do pneu da frente for Δt maior, você estará medindo o comprimento da bicicleta menos a distância que o pneu de trás andou no intervalo Δt .

Para movimentos relativísticos, com velocidades comparáveis com c , para medir precisamente o comprimento, você vai precisar de um procedimento mais elaborado. A figura 8 sugere uma solução.

Desta vez, você tem uma equipe grande de múnions a sua disposição e uma coleção de relógios sincronizados, como os que aparecem na figura 8. Dá um relógio a cada múnion, com as seguintes instruções: “Cada um de vocês deve tomar um lugar bem perto do trilho por onde passará a barra, daqui a pouco. Espaço de um centímetro entre um

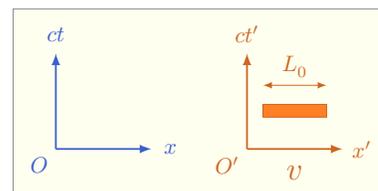


Figura 7: Medida do comprimento de uma barra em movimento. A barra está fixa no referencial móvel, que tem velocidade v em relação ao referencial de laboratório. No referencial móvel, ela tem comprimento L_0 .

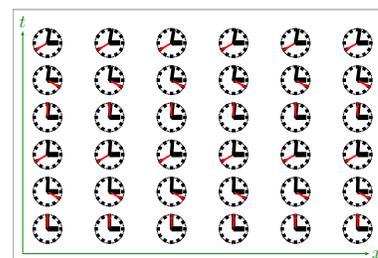


Figura 8: Arranjo experimental que permite medir a velocidade da barra na figura 7. Os relógios são sincronizados no referencial de laboratório e estão igualmente espaçados ao longo do eixo x .

mínion e o próximo. Cada um fique de olho no seu relógio. Quando ele marcar 15hoom10s, olhe imediatamente para o trilho, bem no ponto a sua frente. Levante a mão direita o mínion que vir a ponta dianteira da barra a sua frente, e também o que vir a ponta traseira, e fiquem com as mãos erguidas para eu poder identificá-los. Cuidado para não se emocionar e derrubar o relógio!”

Passada a barra, você mede a distância L entre os dois mínions e obtém, assim, o comprimento.

Podemos, agora, relacionar L com L_0 . A medida envolve dois eventos: (A) o mínion da frente vê a ponta da barra passar adiante de si; (B) o mínion de trás vê a outra ponta passar. Os dois eventos estão separados pela distância $\Delta x = L$ e são simultâneos, isto é, $\Delta t = 0$. No referencial móvel, os dois eventos estão separados pela distância $\Delta x' = L_0$. Eles ocorrem em tempos distintos, mas desconhecemos o intervalo $\Delta t'$ entre eles.

Uma vez que é linear, a transformação de Lorentz descreve tanto a posição e o instante em que ocorre um evento como as distâncias e intervalos de tempo entre dois eventos. Em outras palavras, sempre podemos escrever que

$$\begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{bmatrix} \quad (56)$$

Para as distâncias e intervalos de tempo entre os eventos A e B , a Eq. (56) assume a forma

$$\begin{bmatrix} c\Delta t' \\ L_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & -\sinh(a) \\ -\sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \quad (57)$$

onde $\tanh(a) = v/c$, e $\Delta t'$ é desconhecido.

Não precisamos de $\Delta t'$ para resolver a Eq. (57). Se multiplicarmos as duas matrizes à direita e igualarmos L_0 com o elemento que aparecerá na linha de baixo da matriz produto, veremos que

$$L_0 = \cosh(a)L, \quad (58)$$

isto é,

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \quad (59)$$

já que $\gamma = \cosh(a)$.

Uma vez que $\gamma > 1$, a Eq. (59) nos diz que o comprimento da barra é menor no referencial de laboratório do que no referencial móvel. Neste último, como está a barra está parada, dizemos que ela tem seu comprimento *próprio* L_0 . Em qualquer outro referencial com velocidade (na direção da barra) diferente, ela será menor. Essa redução

é conhecida como *contração de Lorentz*, porque Lorentz observou que ela explica o resultado negativo da experiência de Michelson e Morley, como já vimos.

A redução no comprimento não deve causar espanto porque é perfeitamente análoga ao que acontece com rotações espaciais. Considere um paralelepípedo com faces a , b e c , como o desenhado na figura 9, onde c é o comprimento das arestas verticais. No painel superior, a face ac está voltada para o observador, com a linha de visada perpendicular à face. Sob essa perspectiva, as arestas com comprimentos a e c são vistas em verdadeira grandeza. Vistas sob outra ótica, como no painel inferior, elas são menores, enquanto as arestas horizontais de comprimento b , que eram invisíveis no painel superior, agora aparecem (embora com tamanho inferior à verdadeira grandeza).

Assim como o tamanho de uma aresta diminui quando ela gira e deixa de ser perpendicular à linha de visada, o tamanho de uma aresta diminui quando o corpo começa a se mover na direção dessa aresta. Mudar de velocidade no espaço-tempo equivale a rodar no espaço geométrico.

Dilatação temporal

Nosso segundo exemplo é descrito pela figura 10. A medida, agora, é de um intervalo de tempo. Em relação a um sistema de coordenadas fixo no laboratório, um sino se desloca com velocidade v na direção x . Num certo instante, soa uma badalada do sino e, pouco depois, outra.

Queremos medir o tempo entre uma badalada e outra. De novo, você convoca os múnions e manda cada um voltar para sua posição, frente ao trilho por onde passará o sino. O múnion que estiver à frente do sino quando soar a primeira badalada deve anotar o tempo que seu relógio marca. Da mesma maneira, o múnion que estiver à frente do sino quando soar a segunda badalada deve anotar a leitura de seu relógio. Quando eles voltarem, você calculará a diferença τ entre os dois tempos anotados.

Um dos múnions é designado para uma tarefa especial. Ele deve correr com velocidade igual à do sino, junto a ele. Esse múnion define o referencial com origem O' na figura. Depois da segunda badalada, ele deverá voltar e informar o tempo τ_0 entre as duas badaladas, no referencial móvel.

As duas medidas darão resultados diferentes, mas podemos relacionar τ com τ_0 . Para isso, antes de mais nada, devemos identificar os eventos que interessam. São dois: as duas badaladas do sino. Cada uma delas ocorre numa posição x e num instante t no referencial de laboratório, e numa posição x' e num instante t' no referencial móvel.

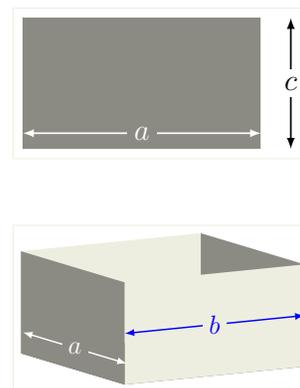


Figura 9: Contração espacial devida a rotação. Os dois painéis mostram uma caixa em formato de paralelepípedo com dimensões $a \times b \times c$. A dimensão c é a vertical. O painel superior mostra a caixa vista perpendicularmente à face com largura a e altura c . O painel inferior mostra a mesma caixa de outra perspectiva.

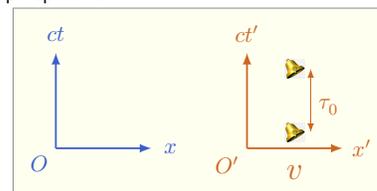


Figura 10: Medida de intervalo de tempo. Em relação ao sistema de coordenadas de laboratório, com origem no ponto O , o sino se desloca com velocidade v . No referencial móvel, com origem em O' , o sino está parado. Nesse sistema, o sino toca uma vez, num certo instante, e outra vez, depois de um intervalo $\Delta t' = \tau_0$.

As diferenças entre as posições e entre os tempos estão relacionadas pela transformação de Lorentz, como na Eq. (56). No caso, sabemos que $\Delta x' = 0$, porque o sino está parado no referencial móvel. O tempo $\Delta t' = \tau_0$ é também conhecido, porque o múnion corredor o mediu.

Temos o necessário para descrever as coordenadas no referencial móvel. Para relacioná-las com as coordenadas no referencial de laboratório, convém empregar a transformação inversa (55), que, no caso, assume a forma

$$\begin{bmatrix} c\tau \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\tau_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Efetuamos, então, o produto matricial à direita, e resulta que

$$\begin{bmatrix} c\tau \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(a)\tau_0 \\ \sinh(a)\tau_0 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

ou seja,

$$\tau = \gamma\tau_0 \quad (62)$$

e

$$\Delta x = \beta\gamma c\tau_0. \quad (63)$$

Se lembrarmos que $\beta \equiv v/c$, perceberemos que a Eq. (63) não contém nada de novo. Ela simplesmente diz que a distância percorrida pelo sino entre uma badalada e outra é o produto da sua velocidade pelo tempo decorrido no referencial de laboratório, isto é, $\Delta x = v\tau$.

A Eq. (62) é mais interessante. Ela mostra que o tempo medido pelos múnions estacionários no referencial de laboratório é maior do que o medido pelo múnion no referencial móvel. Sob a ótica do referencial de laboratório, o movimento do sino *dilata*, o intervalo de tempo entre as badaladas. Assim como o comprimento da barra na seção [Contração espacial](#) se reduz no referencial de laboratório, o intervalo de tempo cresce. Os dois efeitos são semelhantes, mas, mais uma vez, vemos que tempo e espaço se comportam de formas distintas.