Gabarito da 3ª Lista de Exercícios - MAE1512

Professora: Silvia Nagib Elian **Monitores:** Danielle Velloso e Rodrigo Passos Martins

Exercício 1

Certo tipo de semente cresce, em média, até a altura de 8,5 cm, com desvio padrão de 1 cm. Semeiam-se 100 delas em um solo enriquecido, a fim de testar se há aumento na altura média nessas condições. Admitindo que a altura atingida com solo enriquecido tem distribuição normal com o mesmo desvio padrão:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{1^2}{100}\right) = N(\mu; 0,01)$$

a)

As hipóteses estatísticas adequadas para esse problema são descritas por:

$$\begin{cases} H_0 : \text{A média não aumenta: } \mu = 8,5 \\ H_a : \text{A média aumenta: } \mu > 8,5 \end{cases}$$

A região crítica do teste, para o nível de significância de 0,05, é dada por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{verdadeira}) = P(\bar{X} > x_c | \mu = 8,5) = P\left(\frac{\bar{X} - 8,5}{\sqrt{0,01}} > \frac{x_c - 8,5}{\sqrt{0,01}}\right) = P(Z_{\bar{X}} > z_c)$$

Notemos que,

$$z_c = \frac{x_c - 8,5}{\sqrt{0,01}} \Leftrightarrow x_c = 8,5 + \frac{z_c}{10}$$

Tendo em vista que $z_c = 1,64$ para $\alpha = 0,05$, x_c é:

$$x_c = 8,5 + \frac{1,64}{10} = 8,5 + 0,164 = 8,664$$

Logo, a região crítica é dada por:

$$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x > 8,664\} \blacksquare$$

b)

Se a amostra de 100 sementes acusar uma média de 8,8 cm de altura, podemos rejeitar a hipótese nula, porque $8,8 \in$ RC da letra **a)**.

c)

Vamos estudar a chance de deixar de detectar um aumento na altura média, se a amostra de 100 sementes fosse proveniente de uma população cuja média é:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$$

i) 8,65 cm

$$P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 8,65) = P(\bar{X} \leq 8,664|\mu = 8,65) = P\left(\frac{\bar{X} - 8,65}{\sqrt{0,01}} \leq \frac{8,664 - 8,65}{\sqrt{0,01}}\right) =$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \leq 0,14) = P(Z_{\bar{X}} \leq 0) + P(0 < Z_{\bar{X}} \leq 0,14) = 0,5 + 0,05567 = 0,55567 \ \square$$

ii) 8,80 cm

$$P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 8,80) = P(\bar{X} \leq 8,664|\mu = 8,80) = P\left(\frac{\bar{X} - 8,80}{\sqrt{0,01}} \leq \frac{8,664 - 8,80}{\sqrt{0,01}}\right) =$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \leq -1,36) = P(Z_{\bar{X}} \geq 1,36) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,36) = 0,5 - 0,41309 = 0,08691 \ \square$$

iii) 9 cm

$$P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 9) = P(\bar{X} \leq 8,664|\mu = 9) = P\left(\frac{\bar{X} - 9}{\sqrt{0,01}} \leq \frac{8,664 - 9}{\sqrt{0,01}}\right) = P(Z_{\bar{X}} \leq -3,36) =$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \geq 3,36) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 3,36) = 0,5 - 0,49961 = 0,00039 \ \blacksquare$$

Exercício 2

Uma amostra aleatória de 36 copos de um certo suco mostrou um conteúdo médio líquido de 200ml, com desvio padrão de 26ml. Vamos admitir que o conteúdo nos copos de suco tem distribuição Normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{26^2}{36}\right)$$

Agora, vamos testar a hipótese de que o conteúdo médio dos copos desse tipo de suco é igual a 225ml contra a hipótese alternativa de que é inferior a 225ml, com o nível de significância $\alpha = 0,05$:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 225 \\ H_a : \mu < 225 \end{cases}$$

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{verdadeira}) = P(\bar{X} < x_c | \mu = 225) = P\left(\frac{\bar{X} - 225}{\sqrt{\frac{26^2}{36}}} < \frac{x_c - 225}{\sqrt{\frac{26^2}{36}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{x_c - 225}{4,33}\right)$$

Notemos que,

$$z_c = \frac{x_c - 225}{4,33} \Leftrightarrow x_c = 225 + 4,33.z_c$$

Tendo em vista que $z_c = -1,64$ para $\alpha = 0,05$, x_c é:

$$x_c = 225 - 1,64.4,33 \cong 225 - 7,1 = 217,9$$

Logo, a região crítica é dada por:

$$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x < 217,9\}$$

Como a média amostral foi de 200ml e percente à RC, então, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

Exercício 3

O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel é de 15 Km/litro, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo em 25 desses veículos, escolhidos ao acaso, e constatou consumo médio de 14,3 Km/litro. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual 9 $(\text{Km/litro})^2$.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{9}{25}\right)$$

a)

Vamos testar, ao nível de significância de 6%, a afirmação da montadora de que a média de consumo é igual a 15Km/litro, contra a alternativa de ser igual a 14 Km/litro. Essa hipótese pode ser descrita como:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_a : \mu = 14 \end{cases}$$

Como $\alpha = 0,06$, temos que $z_c = -1,56$. Logo, sob H_0:

$$x_c = \mu + z_c . \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 15 - 1,56 . \sqrt{\frac{9}{25}} = 14,064$$

Portanto, RC $= \{x \in \mathbb{R} : x < 14,064\}$.

Assim, como a média observada foi de 14,3 e ela não pertence à RC, não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 6%.

b)

Vamos determinar a probabilidade do <u>erro tipo II</u>:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \notin \mathbb{R} | \mu = 14) = P\left(\frac{\bar{X} - 14}{\sqrt{\frac{9}{25}}} \geq \frac{14,064 - 14}{\sqrt{\frac{9}{25}}}\right) \cong$$

$$\cong P(Z_{\bar{X}} \geq 0,107) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 0,107) \cong 0,5 - 0,0438 = 0,4562 \ \blacksquare$$

Exercício 4

A resistência de um certo tipo de cabo de aço é uma variável aleatória com distribuição normal com desvio padrão 6 Kgf:

$$X \sim N(\mu; 6^2)$$

Uma amostra de 25 desses cabos forneceu média igual a 9,8 Kgf ($\bar{X} = 9,8$).

Vamos testar a hipótese de que a resistência média é igual a 13 contra a alternativa de que é diferente de 13 com o nível de significância α de 0,02:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 13 \\ H_a : \mu \neq 13 \end{cases}$$

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{verdadeira}) = P(\bar{X} \in RC | \mu = 13) = P(\bar{X} < x_{c_1} \text{ ou } \bar{X} > x_{c_2} | \mu = 13) =$$

$$P(\bar{X} < x_{c_1} | \mu = 13) + P(\bar{X} > x_{c_2} | \mu = 13) = P\left(\frac{\bar{X} - 13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}} < \frac{x_{c_1} - 13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - 13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}} > \frac{x_{c_2} - 13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}}\right) = P(Z_{\bar{X}} < z_{c_1}) + P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2})$$

Por conta da simetria da distribuição Normal, podemos assumir que $z_{c_1} = -z_{c_2}$. Logo,

$$P(Z_{\bar{X}} < z_{c_1}) + P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2}) = 2.P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2}) = 0,02 \Leftrightarrow P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2}) = 0,01$$

Assim, temos que $z_{c_2} = 2,33$ e $z_{c_1} = -z_{c_2} = -2,33$. Sendo assim, temos que,

$$x_{c_1} = 13 - 2,33.\frac{6}{5} = 10,204 \quad \text{e} \quad x_{c_2} = 13 + 2,33.\frac{6}{5} = 15,796$$

Então, a região crítica é dada por:

$$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x < 10,204 \text{ ou } x > 15,796\}$$

Logo, como a média observada de 9,8 Kgf pertence à RC, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 0,02.

Exercício 5

Usualmente, o tempo médio para um operário executar uma tarefa é de 100 minutos. Introduziu-se uma modificação para diminuir essa média e após certo período, sorteou-se uma amostra de 16 operários, medindo-se o tempo de execução de cada um. O tempo médio observado na amostra foi de 85 minutos e o desvio padrão, 12 minutos.

Admitindo que a distribuição da variável tempo de execução da tarefa é Normal, ao nível de significância de 5%, vamos verificar se estes resultados trazem evidências da melhora desejada:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 100 \\ H_a : \mu < 100 \end{cases}$$

Como $\alpha = 0,05$, sob H_0, o erro do tipo I é dado por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{verdadeira}) = P(\bar{X} \leq x_c | \mu = 100) = P\left(\frac{\bar{X} - 100}{\frac{12}{\sqrt{16}}} \leq \frac{x_c - 100}{\frac{12}{\sqrt{16}}}\right) = P(t_{16-1} \leq t_c)$$

Assim, temos que,

$$t_c = \frac{x_c - 100}{\frac{12}{\sqrt{16}}} \Leftrightarrow x_c = 100 + \frac{12}{4}.t_c = 100 + 3.(-1,753) = 94,741$$

Portanto, RC $= \{x \in \mathbb{R} : x < 94,741\}$.

Assim, como a média observada foi de 85 e ela pertence à RC, rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%. Ou seja, os resultados indicam uma evidência de melhora no processo.

Agora, vamos construir um intervalo de confiança com coeficiente de confiança de 0,90 para o novo tempo médio de execução:

$$IC(\mu; \gamma = 90\%) = \bar{X} \pm t_{15,\gamma}.\frac{s}{\sqrt{n}} = \left[85 - 1,753.\frac{12}{\sqrt{16}}; 85 + 1,753.\frac{12}{\sqrt{16}}\right] = [79,741; 90,259] \blacksquare$$

Exercício 6

No teste de hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1150, \text{com } \sigma = 150 \\ H_a : \mu = 1200, \text{com } \sigma = 200 \end{cases}$$

para X com distribuição Normal, utilizou-se $n = 100$ e a RC $= \{\bar{X} \geq 1170\}$.

a)

A probabilidade de se rejeitar H_0 quando verdadeira é dada por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{verdadeira}) = P(\bar{X} > x_c | \mu = 1150) = P\left(\frac{\bar{X} - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}} > \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z_{\bar{X}} > z_c)$$

Daqui, temos que, como o x_c dado é de 1170, então:

$$z_c = \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}} = \frac{1170 - 1150}{15} \cong 1,33$$

Da tabela, temos que:

$$\alpha = P(Z_{\bar{X}} > z_c) = P(Z_{\bar{X}} > 1,33) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,33) = 0,5 - 0,40824 = 0,09176 = 9,176\% \blacksquare$$

b)

A probabilidade de aceitarmos H_0 quando H_1 é verdadeira se dá por:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \notin \text{RC} | \mu = 1200) = P(\bar{X} \leq 1170 | \mu = 1200) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}} \leq \frac{1170 - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z_{\bar{X}} \leq -1,5) = P(Z_{\bar{X}} \geq 1,5) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,5) = 0,5 - 0,43319 \cong 0,0668 \blacksquare$$

c)

A região crítica para que se tenha $\alpha = \beta$ deve ser:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{x_c - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}}\right)$$

Pela simetria da normal, temos que $P(Z < -z) = P(Z > z)$, portanto:

$$P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{x_c - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}}\right) \Leftrightarrow -\left(\frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = \frac{x_c - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}} \Leftrightarrow 4.(-x_c + 1150) = 3.(x_c - 1200) \Leftrightarrow$$

$$-4.x_c + 4600 = 3.x_c - 3600 \Leftrightarrow 7.x_c = 8200 \Leftrightarrow x_c \cong 1171,43$$

Logo, a região crítica deve ser tal que RC $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1171,43\}$ ■

Exercício 7

Um comprador vai adquirir um novo tipo de luva a prova d'água mas receia que elas não sejam tão boas quanto as anteriores que acusavam 1% de pares defeituosos. Assim, para cada remessa ele toma uma amostra de 100 pares e avalia a proporção de pares defeituosos a fim de realizar um teste a nível de significância de 9%.

a)

As hipóteses nula e alternativa são:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,1 \\ H_a : p > 0,1 \end{cases}$$

b)

Vamos verificar para quais valores da proporção amostral a hipótese nula será rejeitada.

Primeiro, vamos considerar a aproximação Normal para esse caso, em que, sob H_0:

$$\hat{p} \sim N\left(0,1; \frac{0,1.0,9}{100} = \frac{0,09}{100}\right)$$

Seja também p a proporção desconhecida de luvas defeituosas.

Agora, considerando uma significância de 0,09, pela tabela $z_c = 1,34$. E como,

$$p_c = p + z_c.\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Temos que a região crítica nessas condições é:

$$p_c = 0,1 + 1,34.\sqrt{\frac{0,1.0,9}{100}} = 0,1402 \Rightarrow \text{RC} = \{0,1402 < \hat{p} \leq 1\} \blacksquare$$

c)

Devemos rejeitar todas as remessas que apresentaram um valor de proporção pertencente à RC. Como RC $= \{0,1402 < p \leq 1\}$, devemos rejeitar as remessas: 25%, 16%, 24%, e 21%.

Exercício 8

O nível de colesterol no sangue é uma variável aleatória com distribuição Normal com média μ desconhecida e desvio padrão 60mg/100ml:

$$X \sim N(\mu; (60mg/100ml)^2)$$

a)

Vamos testar, a um nível de significância de 5%, a hipótese de que a média é 260 contra a alternativa de que é maior que 260 com base em uma amostra de 50 pacientes em que se observou uma média amostral de 268:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 260 \\ H_a : \mu > 260 \end{cases}$$

Como $\alpha = 0,05$, temos que $z_c = 1,64$. Logo, sob H_0:

$$x_c = \mu + z_c.\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 260 + 1,64.\sqrt{\frac{60^2}{50}} \cong 273,92$$

Portanto, RC $= \{x \in \mathbb{R} : x > 273,92\}$.

Assim, como a média observada foi de 268 e ela não pertence à RC, não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%.

b)

Agora, vamos calcular a probabilidade do erro do tipo II se o valor da média μ for igual a 290:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 290) = P(\bar{X} \leq 273,92|\mu = 290) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 290}{\frac{60}{\sqrt{50}}} \leq \frac{273,92 - 290}{\frac{60}{\sqrt{50}}}\right) \cong P(Z_{\bar{X}} \leq -1,895) = P(Z_{\bar{X}} > -1,895) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,895) = 0,5 - 0,47062 \cong 0,029 \blacksquare$$

c)

Vamos calcular o tamanho da amostra para que o intervalo com 99% de confiança para μ tenha um comprimento de 30 unidades.

O intervalo de confiança para μ é dado por:

$$IC(\mu; \gamma = 0,99) = \bar{X} \pm Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Assim, o comprimento do intervalo se dá por:

$$2.Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Portanto, para termos um intervalo de confiança com 30 unidades de comprimento, precisamos de um tamanho amostra n tal que:

$$2.Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 30 \Leftrightarrow 2,58.\frac{60}{\sqrt{n}} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2,58.\frac{60}{15} \Leftrightarrow n = (2,58.4)^2 \cong 107$$

Logo, precisamos de $n = 107$.

d)

Agora, com base nos dados do item **a)**, vamos construir um intervalo com 94% de confiança para μ:

$$IC(\mu;\gamma = 0,94) = \bar{X} \pm Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 268 \pm 1,88.\frac{60}{\sqrt{50}} = [252,05; 283,95] \blacksquare$$

Exercício 9

Um estudante submetido a uma prova do tipo teste, com 64 questões de 5 alternativas cada, acertou 14 questões.

Vamos testar a hipótese de que o aluno está adivinhando as respostas (apenas "chutando" sem conhecimento).

a)

Como são 64 questões com 5 alternativas cada, espera-se que o aluno acerte pelo menos $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ das questões, ou seja,

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,2 \text{ (O aluno teve a pontuação mínima esperada - chutando)} \\ H_a : p > 0,2 \text{ (O aluno está melhor do que o que se espera de quem chuta)} \end{cases}$$

Sabendo que ele acertou 14 questões de 64 ($n = 64$), podemos considerar que $\hat{p}_{obs} = \frac{14}{64} = 0,21875$.

b)

Agora, vamos construir a região de confiança para fazermos o teste. Como $\alpha = 0,05$, temos que $z_c = 1,64$. Logo, sob H_0:

$$p_c = p + z_c.\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,2 + 1,64.\sqrt{\frac{0,2.0,8}{64}} = 0,282$$

Portanto, RC $= \{0,282 < p \leq 1\}$.

Assim, como $\hat{p}_{obs} \notin$ RC, não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%. Ou seja, os dados sugerem que o aluno está adivinhando as respostas da prova.