

Objetos de Escolha: Portfolio de Média-Variância

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

COPELAND, T.; WESTON, J.; SHASTRI, K. Financial Theory and Corporate Policy. Reading, Addison-Wesley, 1988 – cap. 5

Risco e Retorno de um Único Ativo

“Os resultados da análise de um portfolio não são mais do que a consequência lógica da sua informação em relação aos ativos” (Harry Markowitz, 1959. Portfolio Selection, p. 205)

Vamos avaliar escolhas diretamente mensuráveis por meio da média e variância dos objetos de escolha (ativos)

Um dos maiores desenvolvimentos da teoria financeira nas últimas décadas é a habilidade de avaliar o risco de maneira quantificável

⇒ As curvas de indiferença dos investidores passaram a ser definidas em termos da média e variância dos retornos dos ativos

⇒ A Teoria do Portfolio de Média-Variância é uma abordagem menos geral do que a Teoria da Preferência de estados, mas é uma teoria essencialmente estatística, que permite ser testada

A ligação entre a riqueza no final do período e o investimento no início do período é a **taxa de retorno**

Sendo \$1 o investimento inicial e a riqueza final dada por \$W, então, a taxa de retorno R é:

$$R = \frac{W - I}{I}$$

Se a riqueza ao final do período fosse conhecida com certeza, então o mesmo aconteceria com a taxa de retorno

Para ativos de risco, o resultado no final do período não é conhecido

Deve-se associar probabilidades aos diversos possíveis resultados e calcular estimativas

Risco e Retorno de um Único Ativo

Considere que o preço inicial (P_0) da ação da empresa Souza seja igual a \$25 e as estimativas de preço da ação no final do período sejam:

Probabilidade (p_i)	Preço por Ação (final do período)	Retorno (R_i)
0,10	\$20,00	-20%
0,20	\$22,50	-10%
0,40	\$25,00	0%
0,20	\$30,00	+20%
0,10	\$40,00	+60%

Vamos usar medidas de tendência central e de dispersão para analisar os resultados esperados no final do período, que resumem um conjunto amplo de possíveis resultados

Medidas de Tendência Central

Tem como objetivo descrever o resultado mais provável em um conjunto de eventos

A medida de tendência mais utilizada é a média, dada por:

$$E(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^N p_i X_i$$

Em que: p_i = probabilidade de ocorrência do evento aleatório X_i ; N = número total de possíveis eventos; ($\sim$) sinal utilizado para indicar uma variável aleatória

Para a empresa Souza, o preço esperado no final do período é:

$$E(\tilde{P}) = .1(20) + .2(22.5) + .4(25) + .2(30) + .1(40) = \$26.50.$$

Logo, o retorno esperado (ou retorno médio) é dado por:

$$E(\tilde{R}) = \frac{E(\tilde{P}) - P_0}{P_0} = \frac{26.50 - 25}{25} = .06$$

Risco e Retorno de um Único Ativo

Algumas propriedades das medidas de tendência central são relevantes:

Propriedade 1: o valor esperado de uma variável aleatória $\tilde{X}$ somado a uma constante a é igual ao valor esperado da variável aleatória, mais a constante:

$$E(\tilde{X} + a) = E(\tilde{X}) + a.$$

Pois:
$$E(\tilde{X} + a) = \sum_{i=1}^N p_i(X_i + a).$$

$$E(\tilde{X} + a) = [p_1(X_1 + a) + p_2(X_2 + a) + \dots + p_n(X_n + a)]$$

$$E(\tilde{X} + a) = \sum_{i=1}^N p_i X_i + a \sum_{i=1}^N p_i$$

$$E(\tilde{X} + a) = \sum_{i=1}^N p_i(X_i) + a,$$

$$E(\tilde{X} + a) = E(\tilde{X}) + a.$$

Propriedade 2: o valor esperado de uma variável aleatória $\tilde{X}$ multiplicado por uma constante a é igual à constante multiplicada pelo valor esperado da variável aleatória:

$$E(a\tilde{X}) = aE(\tilde{X}).$$

Pois:
$$E(a\tilde{X}) = \sum_{i=1}^N p_i(aX_i).$$

$$E(a\tilde{X}) = p_1aX_1 + p_2aX_2 + \dots + p_naX_n.$$

$$E(a\tilde{X}) = a \sum_{i=1}^N p_i X_i.$$

$$E(a\tilde{X}) = aE(\tilde{X})$$

Outras medidas de tendência:

- *Moda: não é muito utilizada para preços de ativos, devido à granularidade dos dados*
- *Mediana: em alguns casos pode ser uma medida melhor do que a média (depende da distribuição), embora a média seja mais utilizada*

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

Mostram qual o risco envolvido na estimativa da média

Há 5 medidas de dispersão mais utilizadas, cada qual com suas vantagens e desvantagens:

Amplitude

$$= X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

- Medida estatística mais simples

Para a empresa Souza, a amplitude é de \$40 - \$20 = \$20

- A amplitude é uma estatística pobre porque aumenta com o tamanho da amostra

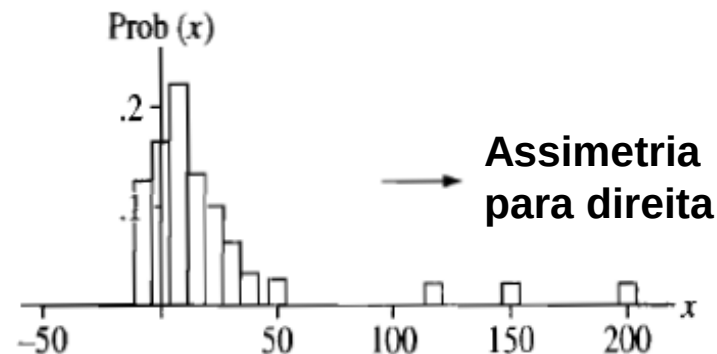
Amplitude

semi-interquartílica

$$= \frac{X_{.75} - X_{.25}}{2}$$

- Ao contrário da amplitude, essa estatística não cresce com o tamanho da amostra e, portanto, é mais confiável: quartis convergem para estimativas consistentes conforme o tamanho da amostra aumenta
- Considere o seguinte conjunto de dados com igual probabilidade:

17	0	7	10	13	3
15	-4	6	-1	17	13
13	25	13	150	-1	6
-8	2	54	32	202	16
13	21	120	24	29	37



Amplitude semi-interquartílica

$$= \frac{27.0 - 4.5}{2} = 11.25.$$

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

Variância

$$\text{VAR}(\tilde{X}) = E[(X_i - E(\tilde{X}))^2]$$

- Medida estatística mais utilizada para medir a dispersão de uma distribuição (risco do investimento)
- É definida como a esperança do quadrado da diferença em relação à média
- Dada a definição da média, podemos escrever a variância como:

$$\text{VAR}(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^N p_i (X_i - E(\tilde{X}))^2.$$

A variância dos preços esperados ao final do período da empresa Souza é:

$$\begin{aligned}\text{VAR}(\tilde{P}) &= .1(20 - 26.5)^2 + .2(22.5 - 26.5)^2 + .4(25 - 26.5)^2 \\ &\quad + .2(30 - 26.5)^2 + .1(40 - 26.5)^2 \\ &= .1(42.25) + .2(16) + .4(2.25) + .2(12.25) + .1(182.25) \\ &= 29.00.\end{aligned}$$

Ou seja: variância = 29 unidades monetárias ao quadrado

Não estamos acostumados a pensar em unidades ao quadrado $\Rightarrow$ **desvio-padrão**: raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma(\tilde{P}) = \sqrt{\text{VAR}(\tilde{P})} = \$5.39.$$

**Desvio-padrão
= volatilidade**

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

$$\text{Variância do retorno: } \text{VAR}(\tilde{R}) = \frac{\text{VAR}(\tilde{P})}{P_0^2} = \frac{29}{(25)^2} = 4.64\%,$$

$$\text{Desvio-padrão do retorno: } \sigma(\tilde{R}) = \sqrt{\text{VAR}(\tilde{R})} = 21.54\%.$$

Esses resultados são obtidos por meio de duas propriedades da variância:

Propriedade 3: a variância de uma variável aleatória mais uma constante é igual à variância da variável aleatória:

$$\text{VAR}(\tilde{X} + a) = E[((X_i + a) - E(\tilde{X} + a))^2].$$

$$\text{Pois: } E(\tilde{X} + a) = E(\tilde{X}) + a;$$

$$\text{VAR}(\tilde{X} + a) = E[((X_i) + a - E(\tilde{X}) - a)^2].$$

$$\text{VAR}(\tilde{X} + a) = E[(X_i - E(\tilde{X}))^2] = \text{VAR}(\tilde{X}).$$

Propriedade 4: a variância de uma variável aleatória multiplicada por uma constante é igual à constante ao quadrado vezes a variância da variável aleatória:

$$\text{VAR}(a\tilde{X}) = a^2 \cdot \text{VAR}(\tilde{X})$$

$$\text{Pois: } \text{VAR}(a\tilde{X}) = E \left[(a [X_i - E(\tilde{X})])^2 \right]$$

$$= E \left[a^2 (X_i - E(\tilde{X}))^2 \right]$$

$$= a^2 E \left[(X_i - E(\tilde{X}))^2 \right] = a^2 \text{VAR}(X)$$

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

$$\text{Variância do retorno: } \text{VAR}(\tilde{R}) = \frac{\text{VAR}(\tilde{P})}{P_0^2} = \frac{29}{(25)^2} = 4.64\%,$$

$$\text{Desvio-padrão do retorno: } \sigma(\tilde{R}) = \sqrt{\text{VAR}(\tilde{R})} = 21.54\%.$$

Esses resultados são obtidos por meio de duas propriedades da variância:

Propriedade 3: a variância de uma variável aleatória mais uma constante é igual à variância da variável aleatória:

$$\text{VAR}(\tilde{X} + a) = E[((X_i + a) - E(\tilde{X} + a))^2].$$

$$\text{Pois: } E(\tilde{X} + a) = E(\tilde{X}) + a;$$

$$\text{VAR}(\tilde{X} + a) = E[((X_i) + a - E(\tilde{X}) - a)^2].$$

$$\text{VAR}(\tilde{X} + a) = E[(X_i - E(\tilde{X}))^2] = \text{VAR}(\tilde{X}).$$

Propriedade 4: a variância de uma variável aleatória multiplicada por uma constante é igual à constante ao quadrado vezes a variância da variável aleatória:

$$\text{VAR}(a\tilde{X}) = a^2 \cdot \text{VAR}(\tilde{X})$$

$$\text{Pois: } \text{VAR}(a\tilde{X}) = E \left[(a [X_i - E(\tilde{X})])^2 \right]$$

$$= E \left[a^2 (X_i - E(\tilde{X}))^2 \right]$$

$$= a^2 E \left[(X_i - E(\tilde{X}))^2 \right] = a^2 \text{VAR}(X)$$

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

$$\text{Variância do retorno: } \text{VAR}(\tilde{R}) = \frac{\text{VAR}(\tilde{P})}{P_0^2} = \frac{29}{(25)^2} = 4.64\%,$$

$$\text{Desvio-padrão do retorno: } \sigma(\tilde{R}) = \sqrt{\text{VAR}(\tilde{R})} = 21.54\%.$$

Dado o cálculo do retorno:

$$R_i = \frac{P_i - P_0}{P_0},$$

Seu valor esperado é:

$$E(\tilde{R}) = \frac{E(\tilde{P}) - P_0}{P_0},$$

Utilizando as duas propriedades anteriores, temos:

✓ Variância do Retorno:

$$\begin{aligned}\text{VAR}(\tilde{R}) &= E \left[(R_i - E(\tilde{R}))^2 \right] \\ &= E \left[\left(\frac{P_i - P_0}{P_0} - \frac{E(\tilde{P}) - P_0}{P_0} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}(\tilde{R}) &= \frac{1}{P_0^2} E \left[(P_i - E(\tilde{P}))^2 \right] \\ &= \frac{\text{VAR}(\tilde{P})}{P_0^2}\end{aligned}$$

Logo: o preço esperado da ação da Souza é \$26,50, com um desvio padrão de \$5,39; ou: retorno esperado do investimento é de 6%, com um desvio padrão de 21,54%

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

Semivariância

$$X_i = \begin{cases} X_i - E(\tilde{X}) & \text{if } X_i < E(\tilde{X}) \\ 0 & \text{if } X_i \geq E(\tilde{X}) \end{cases},$$

$$\text{SEMIVAR} = E \left[(X_i)^2 \right].$$

- Investidores podem estar mais preocupados com o risco de queda do que com o risco de alta
- Semivariância é definida como a esperança das diferenças médias abaixo da média, ao quadrado
- É uma medida mais adequada do que a variância para captar o risco de um dos lados da distribuição, uma vez que a variância dá pesos iguais às possibilidades acima e abaixo da média
- Pela semivariância, um aumento na probabilidade de eventos acima da média alteram muito pouco a medida de risco: o único efeito é aumentar levemente a média

Para a empresa Souza, a semivariância é:

$$\begin{aligned} \text{SEMIVAR} &= .1(-.20 - .06)^2 + .2(.10 - .06)^2 + .4(0 - .06)^2 \\ &= 1.332\%. \end{aligned}$$

Se a probabilidade do retorno de 60% aumentar para 0,20, enquanto a probabilidade do retorno de 20% cair para 0,10, o impacto na semivariância é pequeno: aumenta para 2,1%; já a variância aumenta de 4,64% para 7,2%

Risco e Retorno de um Único Ativo

Medidas de Dispersão

Desvio Médio Absoluto

$$DMA = E[|X_i - E(\tilde{X})|]$$

- DMA é uma medida estatística menos sensível a observações distantes da média, como a variância ou a semivariância, uma vez que são medidas quadráticas

Para a empresa Souza, temos:

$$\begin{aligned} DMA &= .1 |(-.2 - .06)| + .2 |(-.1 - .06)| + .4 |0 - .06| \\ &\quad + .2 |(.2 - .06)| + .1 |(.6 - .06)| \\ &= 16.4\%. \end{aligned}$$

Distribuição Normal

Para um gestor de risco, o risco de uma empresa pode ser medido pela estimativa da média e variância dos retornos do portfolio de ativos da empresa: estoques, caixa, recebíveis, títulos, valor da planta da empresa etc

⇒ Risco e retorno são dados pela variância e pela média dos ativos ponderados do portfolio

Vamos assumir que os retornos tem Distribuição Normal, que é completamente descrita pela média e variância (distribuição simétrica)

- ✓ Variância e a semivariância são medidas equivalentes de risco
- ✓ Se tivermos a média e o desvio-padrão, então é possível saber a probabilidade de todos os pontos da distribuição

Distribuição Normal

A equação da frequência dos retornos (R) normalmente distribuídos é:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(R-E(R))/\sigma]^2}$$

Se soubermos a média, $E(R)$, e o desvio-padrão, σ , da distribuição, podemos calcular a frequência de qualquer retorno

Exemplo: $E(R) = 10\%$ e $\sigma = 20\%$, então, a frequência do retorno de 13% é:

$$\begin{aligned} f(.13) &= \frac{1}{.2\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(.13-.10)/.2]^2} \\ &= 1.972. \end{aligned}$$

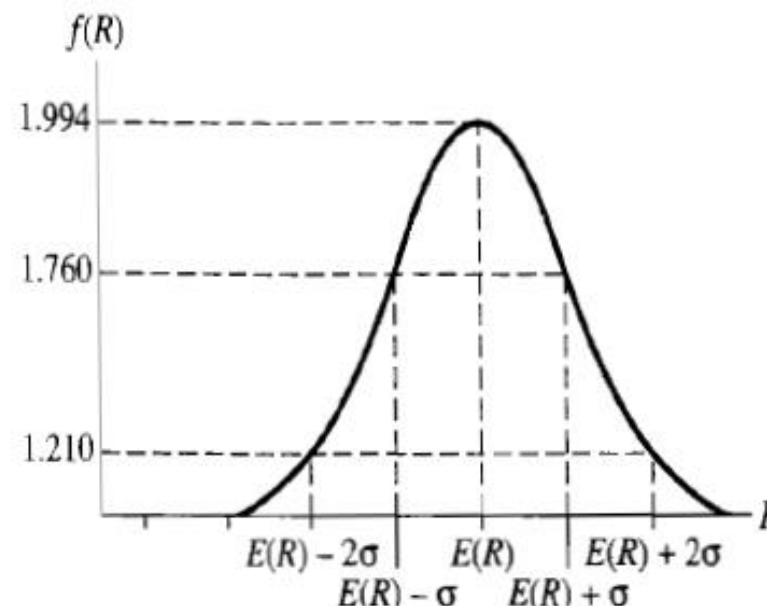
A distribuição Normal para $E(R) = 10\%$ e $\sigma = 20\%$ pode ser vista ao lado:

É conveniente usarmos a distribuição Normal Padrão, que possui média zero e desvio-padrão 1: frequências tabeladas $\Rightarrow$ para isso, utilizamos o valor z:

$$z = \frac{R - E(R)}{\sigma}$$

O valor de z tem função frequência dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)z^2}$$



Média e Variância de um Portfolio com Dois Ativos

Considere um portfolio com dois ativos de risco, ambos normalmente distribuídos

Como calculamos a média e o desvio-padrão desse portfolio em que **$a\%$** está investido no ativo X e **$b\% = (1 - a\%)$** está investido no ativo Y?

Matematicamente, o retorno do portfolio pode ser calculado como a soma ponderada das duas variáveis aleatórias:

$$\tilde{R}_p = a\tilde{X} + b\tilde{Y}$$

A média dos retornos é calculada como o resultado esperado:

$$E(\tilde{R}_p) = E[a\tilde{X} + b\tilde{Y}]$$

$$E(\tilde{R}_p) = E(a\tilde{X}) + E(b\tilde{Y}).$$

$$E(\tilde{R}_p) = aE(\tilde{X}) + bE(\tilde{Y}).$$

A variância do portfolio é a soma das variâncias dos ativos individuais multiplicada pelo quadrado de seus pesos + termo que inclui a covariância

A variância dos retornos é calculada como:

$$\text{VAR}(\tilde{R}_p) = E[\tilde{R}_p - E(\tilde{R}_p)]^2$$

$$= E[(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) - E(a\tilde{X} + b\tilde{Y})]^2$$

$$\text{VAR}(\tilde{R}_p) = E[(a\tilde{X} - aE(\tilde{X})) + (b\tilde{Y} - bE(\tilde{Y}))]^2$$

$$\text{VAR}(\tilde{R}_p) = E[a^2(\tilde{X} - E(\tilde{X}))^2 + b^2(\tilde{Y} - E(\tilde{Y}))^2 + 2ab(\tilde{X} - E(\tilde{X}))(\tilde{Y} - E(\tilde{Y}))]$$

$$\text{VAR}(\tilde{R}_p) = a^2\text{VAR}(\tilde{X}) + b^2\text{VAR}(\tilde{Y}) + 2abE[(\tilde{X} - E(\tilde{X}))(\tilde{Y} - E(\tilde{Y}))],$$

$$\text{COV}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \equiv E[(\tilde{X} - E(\tilde{X}))(\tilde{Y} - E(\tilde{Y}))].$$

Média e Variância de um Portfolio com Dois Ativos

A covariância é a medida pela qual duas variáveis aleatórias se movem uma em relação à outra:

- ✓ Covariância positiva: variáveis se movem na mesma direção;
- ✓ Covariância negativa: variáveis se movem em direções opostas.

A covariância é a medida da contribuição de um ativo para o risco do portfolio

$$\text{VAR}(R_p) = a^2 \text{VAR}(X) + b^2 \text{VAR}(Y) + 2ab \text{COV}(X, Y)$$

A variância de uma variável é a covariância da variável em relação a ela mesma

$$\begin{aligned}\text{COV}(aX, aX) &= a \cdot a E[(X - E(X))(X - E(X))] \\ &= a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 \text{VAR}(X)\end{aligned}$$

Considere os retornos aos ativos X e Y:

Prob.	Xi (%)	Yi (%)
0,20	11	-3
0,20	9	15
0,20	25	2
0,20	7	20
0,20	-2	6

Valor esperado de X = 10%

Valor esperado de Y = 8%

Variâncias:

$$\begin{aligned}\text{VAR}(X) &= .2(.11 - 10)^2 + .2(.09 - 10)^2 + .2(.25 - 10)^2 \\ &\quad + .2(.07 - .10)^2 + .2(-.02 - .10)^2 \\ &= .0076;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}(Y) &= .2(-.03 - .08)^2 + .2(.15 - .08)^2 + .2(.02 - .08)^2 \\ &\quad + .2(.20 - .08)^2 + .2(.06 - .08)^2 \\ &= .00708.\end{aligned}$$

Média e Variância de um Portfolio com Dois Ativos

Considere os retornos aos ativos X e Y:

Prob.	Xi (%)	Yi (%)
0,20	11	-3
0,20	9	15
0,20	25	2
0,20	7	20
0,20	-2	6

Covariância:

$$\begin{aligned}\text{COV}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= .2(.11 - .10)(.03 - .08) + .2(.09 - .10)(.15 - .08) \\ &\quad + .2(.25 - .10)(.02 - .08) + .2(.07 - .10)(.20 - .08) \\ &\quad + .2(-.02 - .10)(.06 - .08) \\ &= -.0024.\end{aligned}$$

Se investirmos nos dois ativos, o resultado é um portfolio com menos risco do que se investirmos em cada ativo separadamente: se perdermos em X, Y deverá compensar em parte a queda de X (e vice-versa)

⇒ Posição está parcialmente *hedgeada* (protegida): risco reduzido

Suponha que investimos 50% da nossa riqueza em cada ativo. Neste caso, o retorno e o risco do portfolio são:

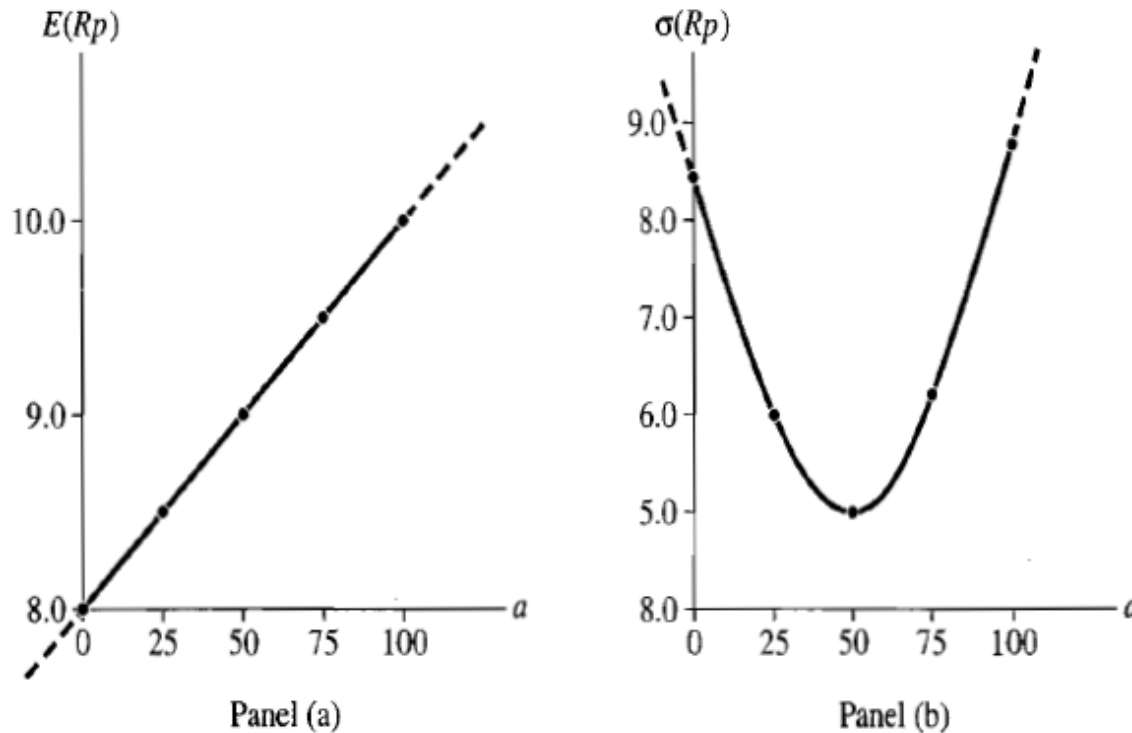
$$\begin{aligned}E(R_p) &= aE(X) + bE(Y) \\ &= .5(.10) + .5(.08) = 9\%.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}(R_p) &= a^2\text{VAR}(X) + b^2\text{VAR}(Y) + 2ab\text{COV}(X, Y) \\ &= (.5)^2(.0076) + (.5)^2(.00708) + 2(.5)(.5)(-.0024) \\ &= .00247 \quad \text{or} \quad \sigma(R_p) = 4.97\%.\end{aligned}$$

Retorno esperado é a média ponderada dos retornos, mas o risco do portfolio é menor do que VAR(X) ou VAR(Y)

Média e Variância de um Portfolio com Dois Ativos

Os gráficos abaixo mostram a relação entre (1) retorno esperado do portfolio e (2) desvio-padrão do portfolio para diferentes percentuais investidos no ativo X (**a**)



A tabela ao lado mostra os valores de retornos esperados e do desvio-padrão para diferentes composições do portfolio:

- Note que o retorno esperado do portfolio é uma função linear do peso de X:

$$\frac{dE(R_p)}{da} = E(X) - E(Y) = 10.0\% - 8.0\% = 2\%.$$

Para cada redução de 1% em a , o retorno esperado do portfolio diminui 2%

- A relação entre o desvio-padrão e o peso do ativo não é linear e tem um ponto de mínimo

Percentage in X	Percentage in Y	$E(\tilde{R}_p)$ (%)	$\sigma(\tilde{R}_p)$ (%)
100	0	10.0	8.72
75	25	9.5	6.18
50	50	9.0	4.97
25	75	8.5	5.96
0	100	8.0	8.41

Média e Variância de um Portfolio com Dois Ativos

O gráfico ao lado mostra a relação entre a média e o desvio-padrão do portfolio para diferentes combinações de X e de Y:

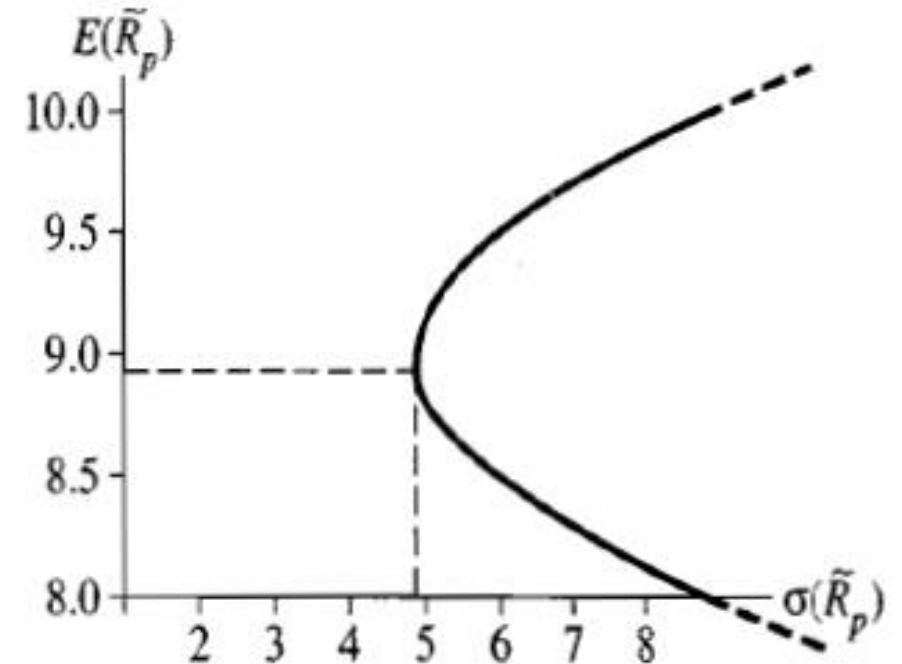
- ⇒ A parte sólida da curva representa as combinações onde os pesos de X e de Y variam entre 0% e 100%
- ⇒ Se for possível ter venda a descoberto, então as porções pontilhadas da curva passam a ser válidas (vamos considerar a venda a descoberto factível para a exposição do modelo)

Se você vender a descoberto X, você receberá rentabilidade de forma que pode comprar quantidade extra de Y. Supondo que haja venda a descoberto de 50% de X, então a média e variância são:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= -.5E(X) + 1.5E(Y) \\ &= -.5(.10) + 1.5(.08) = 7.0\%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(R_p) &= (-.5)^2\text{VAR}(X) + (1.5)^2\text{VAR}(Y) + 2(-.5)(1.5)\text{COV}(X, Y) \\ &= .25(.0076) + (2.25)(.00708) + 2(-.75)(-.0024) = .02143. \end{aligned}$$

$$\sigma(R_p) = \sqrt{\text{VAR}(R_p)} = 14.64\%.$$



O Efeito da Correlação

A correlação entre duas variáveis aleatórias, r_{xy} , é definida como a covariância dividida pelo produto dos desvios-padrão, ou seja:

$$r_{xy} \equiv \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Se os retornos de dois ativos forem totalmente independentes: $r_{xy} = 0$

Se os retornos de dois ativos forem perfeitamente positivamente correlacionados: $r_{xy} = 1$

Se os retornos de dois ativos forem perfeitamente negativamente correlacionados: $r_{xy} = -1$

Dessa forma, o coeficiente de correlação varia entre +1 e -1, ou seja:

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1$$

No exemplo que estamos utilizando:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-0,0024}{(0,0872) \cdot (0,0841)} = -0,33$$

Rearranjando a definição do coeficiente de correlação, podemos escrever a covariância como:

$$\text{cov}(X, Y) = r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$$

Logo, podemos escrever a variância de um portfolio de dois ativos como:

$$\text{VAR}(R_p) = a^2 \cdot \text{VAR}(X) + b^2 \cdot \text{VAR}(Y) + 2 \cdot ab \cdot r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$$

(vamos usar essa forma de escrever a variância para encontrar o portfolio de variância mínima)

Portfolio de Mínima Variância

O portfolio de variância mínima é aquele em que a variância do portfolio (ou o desvio-padrão) não se altera com respeito a mudanças no percentual investido em um dos ativos

Dado que a soma dos pesos deve ser igual a 1, em um portfolio de dois ativos (X e Y) temos que $b = 1 - a$. Assim, a variância do portfolio pode ser reescrita como:

$$VAR(R_p) = a^2 \cdot \sigma_x^2 + (1 - a)^2 \cdot \sigma_y^2 + 2 \cdot a(1 - a) \cdot r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$$

Para minimizar a variância do portfolio, vamos usar a CPO:

$$\frac{dVAR(R_p)}{da} = 2a \cdot \sigma_x^2 - 2\sigma_y^2 + 2a\sigma_y^2 + 2 \cdot r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y - 4a \cdot r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y = 0$$

$$a(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y) + r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_y^2 = 0$$

$$a^* = \frac{\sigma_y^2 - r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Peso ótimo que minimiza a variância do portfolio com dois ativos de risco

No exemplo que estamos utilizando:

$$a^* = \frac{0,00708 - (-0,33) \cdot (0,0872) \cdot (0,0841)}{0,0076 + 0,00708 - 2(-0,33) \cdot (0,0872) \cdot (0,0841)} = 0,487$$

Logo: $b^* = 0,513$

Retorno e variância do portfolio de mínima variância:

$$E(R_p) = 0,487 \cdot 0,10 + 0,513 \cdot 0,08 = 0,08974 = 8,974\%$$

$$VAR(R_p) = 0,487^2 \cdot 0,0076 + 0,513^2 \cdot 0,00708 + 2 \cdot 0,487 \cdot 0,513 \cdot (-0,33) \cdot (0,0872) \cdot (0,0841) = 0,0024565$$

$$\sigma_p = 4,956\%$$

Portfolio de Mínima Variância

ATIVOS PERFEITAMENTE CORRELACIONADOS

Suponha que $r_{xy} = 1$ (todas as combinações de X e Y estão sobre uma reta)

Se considerarmos os mesmos dados do ativo Y do exemplo anterior ($DP = 8,41\%$) e considerarmos que $X = 1,037.Y + 1,703$, de forma que $\sigma_x = 1,037.\sigma_y$, então $\sigma_x = 8,72\%$. Assim: $COV(X, Y) = 1.\sigma_x.\sigma_y = 0,007334$

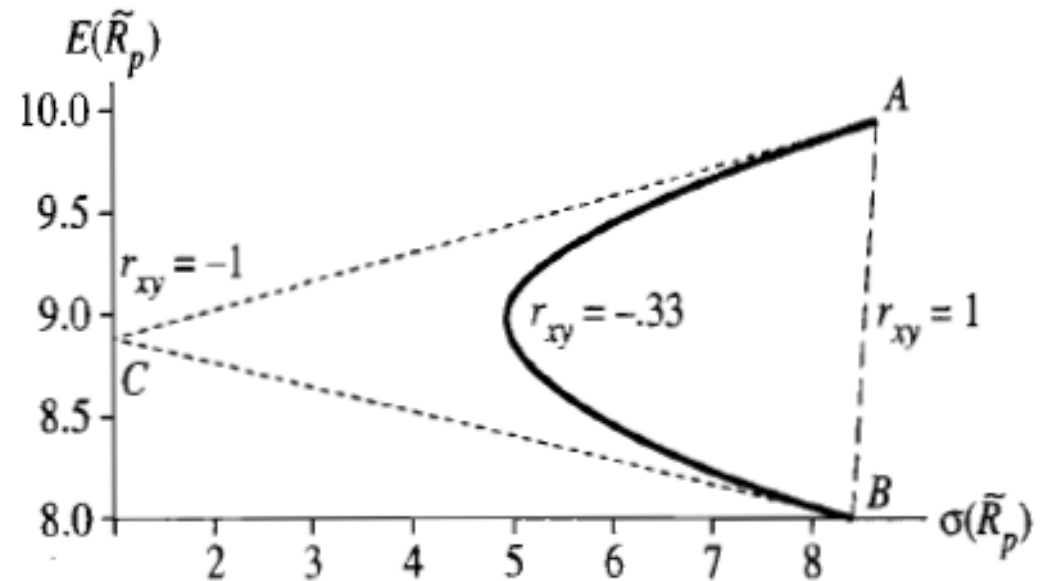
Vamos observar graficamente o que ocorre quando temos dois ativos perfeitamente correlacionados:

- Ponto A: risco e retorno de um portfolio que consiste 100% de investimento em X
- Ponto B: risco e retorno de um portfolio que consiste 100% de investimento em Y
- Linha tracejada: risco e retorno de todas as combinações de X e Y quando eles são perfeitamente correlacionados, pois, quando $r_{xy} = 1$, temos:

$$E(R_p) = aE(X) + (1 - a)E(Y),$$

$$VAR(R_p) = a^2\sigma_x^2 + (1 - a)^2\sigma_y^2 + 2a(1 - a)\sigma_x\sigma_y.$$

Logo: $VAR(R_p) = [a\sigma_x + (1 - a)\sigma_y]^2 \Rightarrow \sigma(R_p) = a\sigma_x + (1 - a)\sigma_y$



Portfolio de Mínima Variância

ATIVOS PERFEITAMENTE CORRELACIONADOS

A forma mais simples de provar que a curva entre A e B é uma reta é mostrar que a inclinação não se altera em função do peso dos ativos

A inclinação da linha é dada pela variação do valor esperado em relação ao desvio-padrão, que pode ser encontrada em função do peso do ativo X (**a**) como:

$$\text{Inclinação} = \frac{dE(R_p)}{d\sigma(R_p)} = \frac{dE(R_p)/da}{d\sigma(R_p)/da}.$$

Sendo: $\frac{dE(R_p)}{da} = E(X) - E(Y)$ e $\frac{d\sigma(R_p)}{da} = \sigma_x - \sigma_y$, logo:

$$\frac{dE(R_p)}{d\sigma(R_p)} = \frac{E(X) - E(Y)}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{.10 - .08}{.0872 - .0841} = 6.45.$$

Ou seja, a inclinação não depende do peso investido em cada um dos ativos, pois a relação entre o retorno esperado e o risco é constante

Portfolio de Mínima Variância

ATIVOS PERFEITAMENTE NEGATIVAMENTE CORRELACIONADOS

Suponha que $r_{xy} = -1$: neste caso, o gráfico é a linha ACB

Se os ativos são perfeitamente inversamente correlacionados, é possível construir uma carteira sem risco (*hedge* perfeito): com a escolha adequada de a , teremos um portfolio com variância zero

A média e a variância do portfolio neste caso são:

$$E(R_p) = aE(X) + (1-a)E(Y),$$

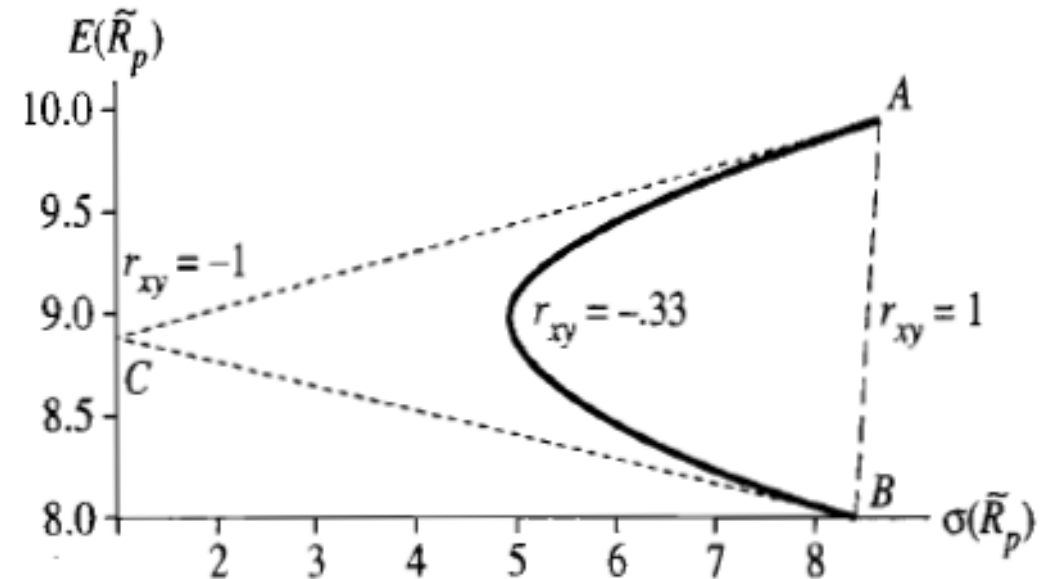
$$\text{VAR}(R_p) = a^2\sigma_x^2 + (1-a)^2\sigma_y^2 - 2a(1-a)\sigma_x\sigma_y, \quad \text{since } r_{xy} = -1.$$

Logo:

$$\text{VAR}(R_p) = [a\sigma_x - (1-a)\sigma_y]^2,$$

$$\sigma(R_p) = \pm[a\sigma_x - (1-a)\sigma_y].$$

- ✓ O desvio-padrão pode ter sinal (+/-), dependendo do valor de a
- ✓ O intercepto da relação média – variância está sempre no eixo vertical (DP zero)



Como $r_{xy} = -1$, então o peso ótimo é:

$$a^* = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} = \frac{.0841}{.0872 + .0841} = 49.095\%.$$

Dessa forma:

$$E(R_p) = .49095(.10) + (1 - .49095)(.08) = 8.92\%,$$

$$\sigma(R_p) = .49095(.0872) - (1 - .49095)(.0841) = 0\%.$$

Portfólio de Mínima Variância

ATIVOS PERFEITAMENTE NEGATIVAMENTE CORRELACIONADOS

Suponha que $r_{xy} = -1$: neste caso, o gráfico é a linha ACB

Vamos examinar as propriedades das linhas AC e CB

É importante lembrar que o DP pode ter sinal positivo ou negativo:

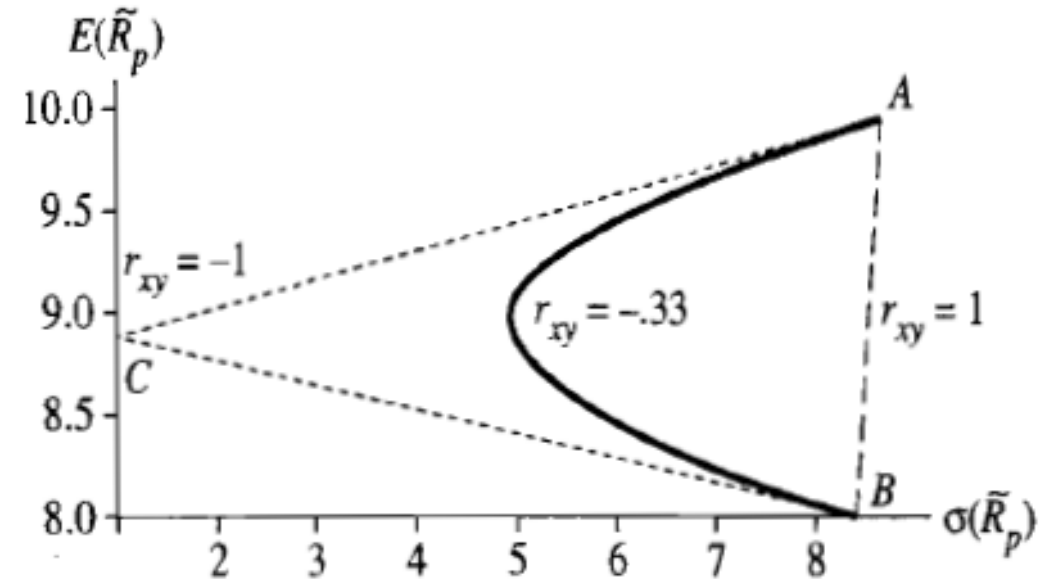
$$\sigma(R_p) = \pm[a\sigma_x - (1-a)\sigma_y].$$

Suponha que $a = 0$ (não há investimento em X), então o DP é um número negativo:

$$\sigma(R_p) = -\sigma_y < 0$$

Como o DP não pode ser um número negativo, a interpretação que deve ser feita é:

- ✓ Se $a \geq a^* \Rightarrow \sigma(R_p) = a\sigma_x - (1-a)\sigma_y$
- ✓ Se $a < a^* \Rightarrow \sigma(R_p) = (1-a)\sigma_y - a\sigma_x$



Podemos usar esses resultados para mostrar que os segmentos AC e CB são lineares. Para o segmento AC temos que $a \geq a^* \Rightarrow \sigma(R_p) = a\sigma_x - (1-a)\sigma_y$, logo:

$$\frac{dE(R_p)}{da} = E(X) - E(Y), \text{ e } \frac{d\sigma(R_p)}{da} = \sigma_x + \sigma_y$$

Para o segmento CB, a inclinação é:

$$\frac{dE(R_p)}{d\sigma(R_p)} = \frac{dE(R_p)/da}{d\sigma(R_p)/da} = \frac{E(X) - E(Y)}{-(\sigma_y + \sigma_x)} = \frac{.10 - .08}{-(.0872 + .0841)} = -.117 < 0.$$

Portfolio de Mínima Variância

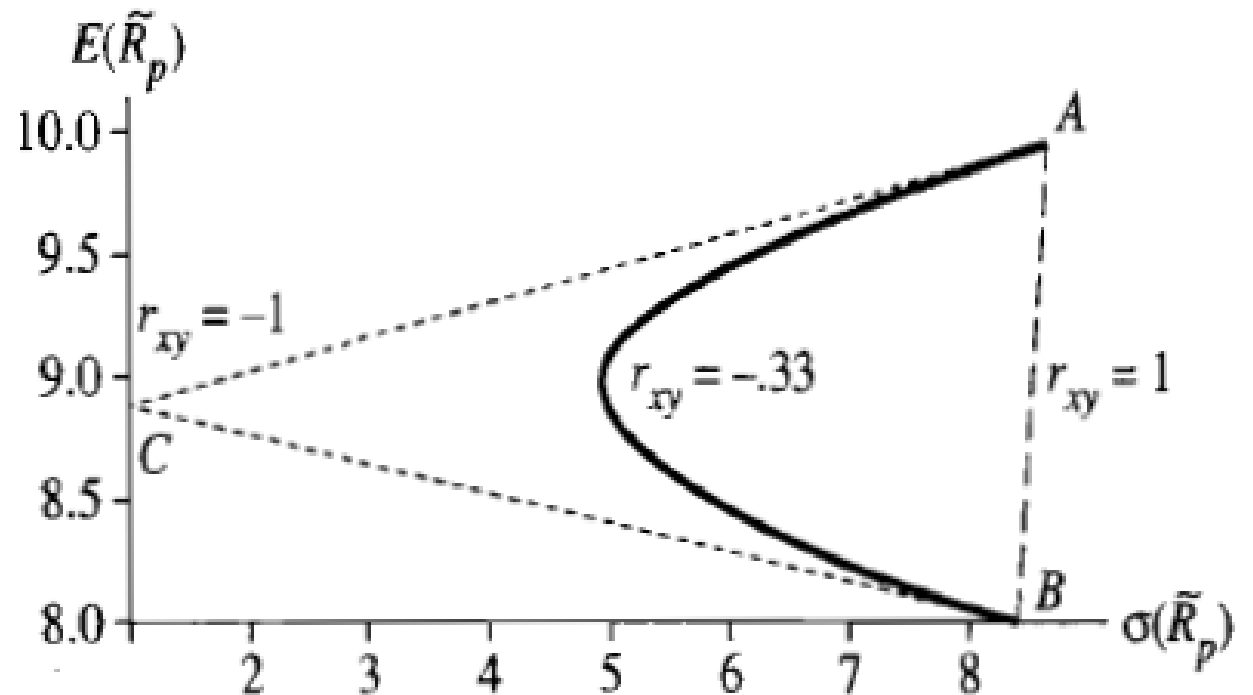
CONJUNTO DE OPORTUNIDADES DE MÍNIMA VARIÂNCIA

Em geral, os ativos possuem correlações que variam entre -1 e 1 $\Rightarrow$ a inclinação do conjunto de oportunidades de média-variância é a linha sólida no gráfico e pode ser definido como:

Conjunto de Oportunidades de Mínima Variância: locus das combinações de risco e retorno oferecidas por portfolios de ativos de risco que levam à menor variância possível, para um dado nível de retorno

Em geral, o conjunto de oportunidades de mínima variância é convexo e limitado pelo triângulo ACB

Qualquer conjunto de combinações de portfolios formados por dois ativos de risco que são menos do que perfeitamente correlacionado deve estar contido no triângulo ACB e é convexo



Conjunto Eficiente de Dois Ativos de Risco

Não há ativo livre de risco: não há possibilidades de emprestar ou tomar emprestado $\Rightarrow$ não há trocas

Resultados são similares aos resultados obtidos no capítulo 2:

portfolio ótimo é aquele em que a taxa marginal subjetiva de substituição entre risco e retorno é exatamente igual à taxa marginal objetiva de transformação entre risco e retorno

No portfolio ótimo: **TMS = TMT $\Rightarrow$ determina o preço subjetivo do risco**

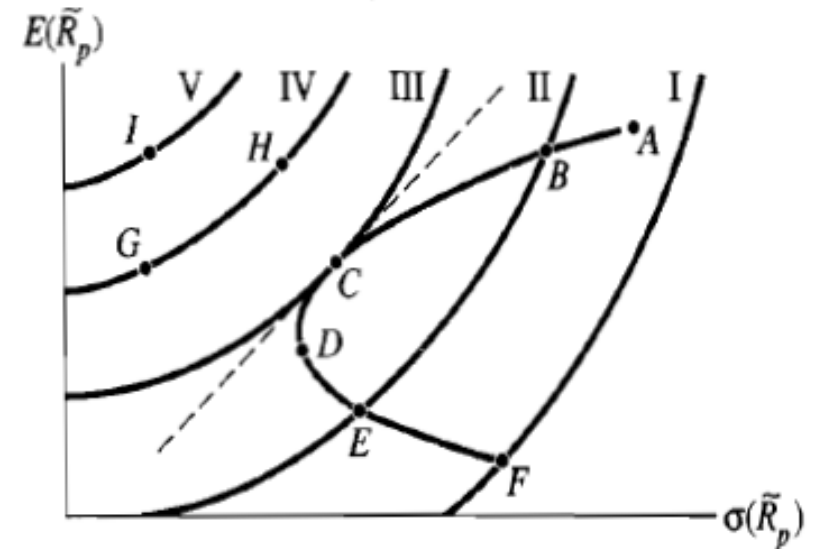
Todos os indivíduos e firmas usam o preço de mercado do risco para decisões ótimas, dada a incerteza

Gráfico ao lado: curvas de indiferença do investidor avesso ao risco (convexas no plano média-variância) juntamente com o conjunto convexo de escolhas de portfolio para dois ativos com risco

Ponto C: máxima utilidade, dado trade-off subjetivo de risco e retorno e as possibilidades objetivas das combinações de risco e retorno dos ativos de risco (ponto de tangência da curva de indiferença e o conjunto de oportunidades de X e Y)

Ponto F: investimento em apenas um ativo de risco $\Rightarrow$ é possível alcançar curvas de indiferença superiores (como o ponto C)

Pontos G, H e I: pontos com maior utilidade total, mas não são factíveis porque o conjunto de oportunidades não alcança tais curvas



Conjunto Eficiente de Dois Ativos de Risco

Uma característica importante do portfolio ótimo que maximiza a utilidade do investidor é que a taxa marginal de substituição entre a preferência de risco e retorno representada pela curva de indiferença deve ser igual à taxa marginal de transformação oferecida pelo conjunto de oportunidade de mínima variância

A inclinação da reta tangente das duas curvas no ponto C é a mesma: essa inclinação representa o trade-off entre risco e retorno oferecido pelo conjunto de oportunidades

O portfolio que maximiza a utilidade é aquele para o qual:

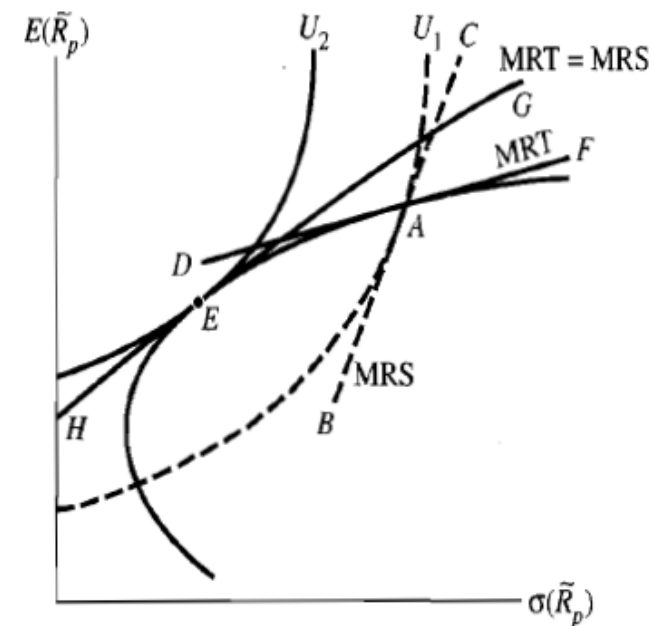
$$TMS_{\sigma(R_p)}^{E(R_p)} = TMT_{\sigma(R_p)}^{E(R_p)}$$

A unicidade deste ponto é garantida pela convexidade da curva de indiferença e pela convexidade da parte superior do conjunto de oportunidade de mínima variância

Suponha que haja uma dotação inicial de um portfolio representado pelo ponto A no gráfico ao lado $\Rightarrow$ ao mudar o percentual de alocação nos ativos de risco, é possível caminhar ao longo do conjunto de oportunidades

TMT entre risco e retorno no conjunto de oportunidades de mínima variância é igual à inclinação da linha DAF: a baixa inclinação indica que podemos reduzir bastante o risco se abrirmos mão de um pouco de retorno

Ao mesmo tempo, a inclinação da curva de indiferença U_1 (reta CAB) indica que a TMS (subjettiva) indica que estamos dispostos a ter menos retorno para ter menos risco



Conjunto Eficiente de Dois Ativos de Risco

CONJUNTO EFICIENTE: conjunto de escolhas de média-variância do conjunto de oportunidades de investimento onde para uma dada variância (ou DP), nenhuma outra oportunidade oferece maior retorno

Ponto B é estocasticamente dominante sobre ponto F

O locus de oportunidades factíveis de média-variância pode ser encontrado pela solução dos dois problemas matemáticos a seguir:

1) Define o problema do portfolio de mínima variância:

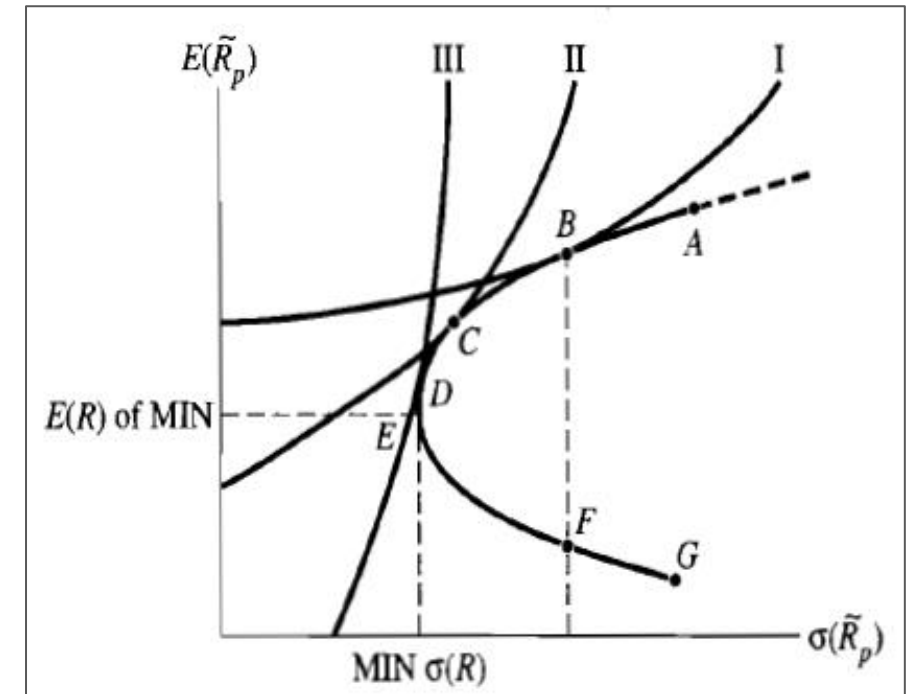
$$\text{MIN } \sigma^2(R_p) \text{ subject to } E(R_p) = K.$$

2) Define o problema do eficiente:

$$\text{MAX } E(R_p) \text{ subject to } \sigma^2(R_p) = K.$$

A variável de decisão em ambos os problemas é o valor de a

Markowitz (1959) foi o primeiro a definir o problema de decisão de portfolio do investidor da forma (1) e mostrou que é equivalente a maximizar a utilidade esperada



Conjunto Eficiente com Ativo Livre de Risco

Considere que um dos dois ativos do portfolio é um **ativo livre de risco (R_f)**: variância igual a zero e covariância igual a zero com o ativo de risco

Nesse caso, o retorno e a variância do portfolio são iguais a:

$$E(R_p) = a \cdot E(X) + (1 - a) \cdot R_f$$

$$VAR(R_p) = a^2 VAR(X) \Rightarrow \text{variância do portfolio igual à variância do ativo com risco}$$

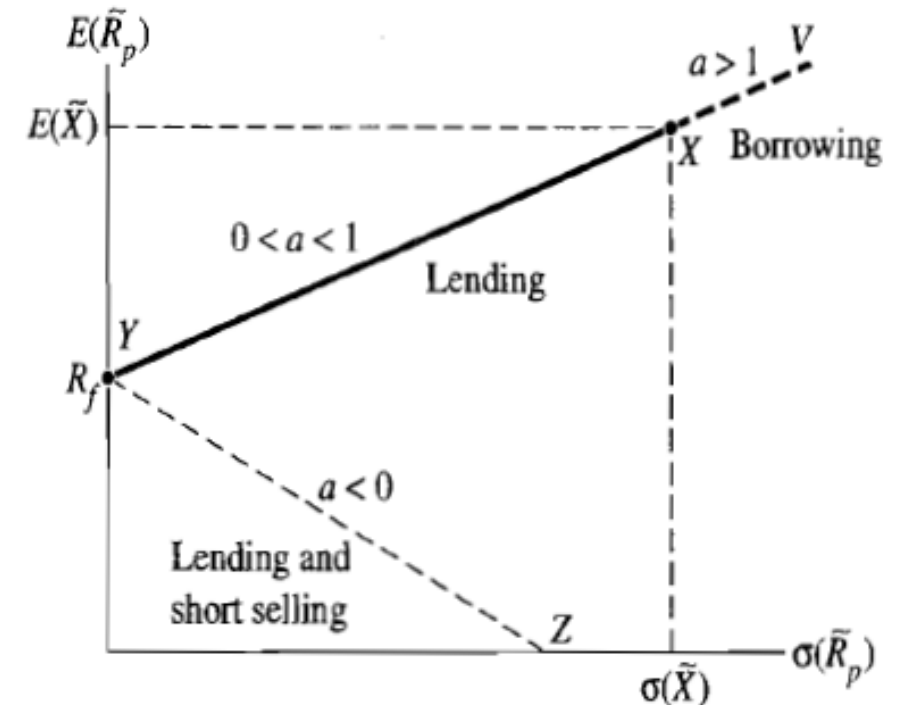
Para este portfolio, o conjunto de oportunidades de investimento é linear, conforme mostrado pelo gráfico ao lado

A variação do retorno esperado com respeito a a é:

$$\frac{dE(R_p)}{da} = E(X) - R_f$$

Logo, a inclinação da reta é:

$$\frac{dE(R_p)}{d\sigma(R_p)} = \frac{dE(R_p)/da}{d\sigma(R_p)/da} = \frac{E(X) - R_f}{\sigma_X}$$



Conjunto Eficiente com Ativo Livre de Risco

Dado o pressuposto de que a taxa de juros para tomar ou dar emprestado é a mesma: YXV é uma reta

Para alcançar portfolios no segmento XV: é necessário tomar emprestado à taxa de juros livre de risco para investir no ativo com risco $\Rightarrow$ venda a descoberto do ativo livre de risco (alocação no ativo com risco $> 100\%$)

Assumindo que não há restrições para venda à descoberto, a média e o risco do portfolio são:

$$E(R_p) = (1 - a)R_f + aE(X),$$

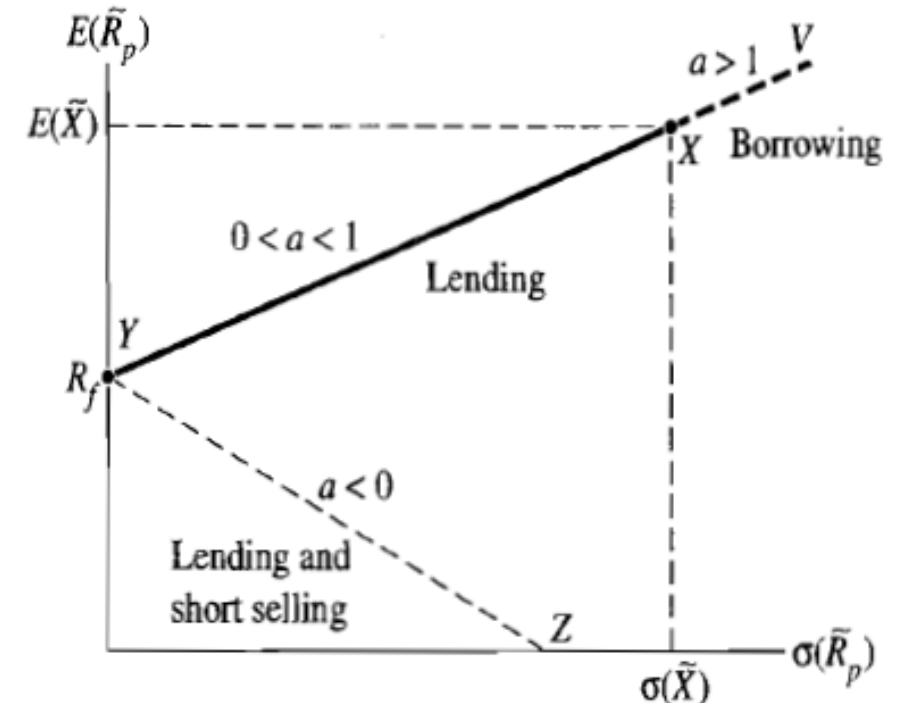
$$\sigma(R_p) = |a| \sigma_X.$$

O valor absoluto de a é usado para calcular o DP por portfolio quando o ativo de risco é vendido a descoberto: linha YZ no gráfico

Conjunto Eficiente: nenhum investidor avesso ao risco irá escolher um portfolio sobre a reta YZ; investidores avessos ao risco sempre irão preferir investir no segmento positivamente inclinado do conjunto de oportunidades de investimento

$\Rightarrow$ Conjunto eficiente: posições compradas no ativo livre de risco

$\Rightarrow$ No equilíbrio: preço do ativo de risco X deve ser ajustado de forma que seu retorno esperado seja maior do que o retorno do ativo livre de risco: ativos de maior risco devem oferecer maior retorno



Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Suponha que existam três ativos no portfolio. Nesse caso, o retorno esperado e a variância são dados por:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^3 w_i E(R_i). \quad \text{e} \quad \text{VAR}(R_p) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \sigma_{ij},$$

Em que: w_i e w_j são os pesos investidos em cada ativo; σ_{ij} é a covariância do ativo i com o ativo j

Para N ativos, a notação matricial é conveniente. Logo, podemos escrever o retorno esperado e a variância do portfolio com N ativos como:

$$E(R_p) = [E(R_1) E(R_2)] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}' \mathbf{W},$$

$$\text{VAR}(R_p) = [w_1 w_2] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}' \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}.$$

Em que: $\mathbf{\Sigma}$ é a matriz de variância-covariância

Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Aplicação: *cross hedging* com contratos futuros

Toda empresa pode ser vista como um portfolio

Considere os dados de balanço da NR S.A dados na tabela abaixo (valores em milhões \$):

Ativo		Passivo	
Curto prazo	\$239	Curto prazo	\$77
Longo prazo	\$200	Longo prazo	\$96
		Patrimônio Líquido	\$266
Ativo Total	\$439	Passivo Total	\$439

Seus ativos são constituídos de prédios e terras, dispersos geograficamente, cujos valores são sensíveis à inflação.

Sua dívida de longo prazo (passivo) tem maturidade de 10 anos, sendo seu valor de mercado sensível a variações da taxa de juros

A posição dos acionistas pode ser considerada como um portfolio comprado nos ativos da empresa e vendido nos passivos e pode ser escrita como:

$$\tilde{R}_S = w_{STA} \tilde{R}_{STA} + w_{LTA} \tilde{R}_{LTA} - w_{STL} \tilde{R}_{STL} - w_{LTD} \tilde{R}_{LTD}$$

Em que:

$\tilde{R}_S$: retorno da riqueza dos acionistas

STA: ativos de curto prazo

LTA: ativos de longo prazo

STL: passivos de curto prazo

LTD: passivos de longo prazo (dívida)

Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Aplicação: cross hedging com contratos futuros

Suponha que o CFO da empresa está preocupado com uma política anti-inflacionária que irá causar um aumento da taxa de juros e, conseqüentemente, um declínio na taxa de inflação

Nesta situação: o valor dos ativos da empresa irão cair e a dívida de longo prazo irá subir $\Rightarrow$ aumento na taxa dívida / ativo e queda no valor de mercado das ações

Para se proteger dessa situação, o CFO decidiu comprar taxa de juros por meio de contratos futuros de taxa de juros (que não requer desembolso de caixa por ser um derivativo) para se proteger da alta da taxa de juros

Os contratos futuros de taxa de juros funcionam da seguinte forma: no vencimento valem \$100.000 e P_{TB} é o preço corrente, em que $P_{TB} = \$100.000 / (1+i)$, sendo i a taxa de juros negociada no contrato futuro (ao período)

Para definir qual o número de contratos que devem ser comprados, considere que: V é o valor de mercado da empresa, $\tilde{R}_{TB}$ é o retorno do contrato futuro. Logo, o retorno do valor da empresa (retorno do acionista) e a variância do retorno, dada a posição de hedge, é:

$$\tilde{R}_S = w_{STA} \tilde{R}_{STA} + w_{LTA} \tilde{R}_{LTA} - w_{STL} \tilde{R}_{STL} - w_{LTD} \tilde{R}_{LTD} + \boxed{\frac{NP_{TB}}{V} \tilde{R}_{TB}}$$

$$\text{VAR}(R_S) = \mathbf{W}' \Sigma \mathbf{W}, \quad \text{Sendo: } \mathbf{W}' = \left[w_{STA}, w_{LTA} - w_{STL}, -w_{LTD}, \frac{NP_{TB}}{V} \right],$$

Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Aplicação: *cross hedging* com contratos futuros

$$\tilde{R}_S = w_{STA} \tilde{R}_{STA} + w_{LTA} \tilde{R}_{LTA} - w_{STL} \tilde{R}_{STL} - w_{LTD} \tilde{R}_{LTD} + \boxed{\frac{NP_{TB}}{V} \tilde{R}_{TB}}$$

$$\text{VAR}(R_S) = \mathbf{W}' \Sigma \mathbf{W}, \quad \text{Sendo: } \mathbf{W}' = \left[w_{STA}, w_{LTA} - w_{STL}, -w_{LTD}, \frac{NP_{TB}}{V} \right],$$

Para encontrar o portfolio ótimo, vamos derivar a variância com respeito ao número de contratos futuros (N); essa variação deve ser igual a zero para haver hedge perfeito do risco da empresa. Assim:

$$\frac{d\text{VAR}(R_S)}{dN} = \frac{2P_{TB}}{V} \sum_i w_i r_{i,TB} \sigma_i \sigma_{TB} + 2 \frac{P_{TB}^2}{V^2} \sigma_{TB}^2 N = 0.$$

Em que: $r_{i,TB}$ = correlação entre o i-ésimo ativo / passivo de risco e o contrato futuro de taxa de juros; σ_i = DP do i-ésimo ativo / passivo; σ_{TB} = DP do contrato futuro de taxa de juros

Resolvendo para N, o número ótimo de contratos futuros é:

$$N = - \sum_i \frac{V_i r_{i,TB} \sigma_i}{P_{TB} \sigma_{TB}}.$$

Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Aplicação: *cross hedging* com contratos futuros

$$\tilde{R}_S = w_{STA} \tilde{R}_{STA} + w_{LTA} \tilde{R}_{LTA} - w_{STL} \tilde{R}_{STL} - w_{LTD} \tilde{R}_{LTD} + \boxed{\frac{NP_{TB}}{V} \tilde{R}_{TB}}$$

$$\text{VAR}(R_S) = \mathbf{W}' \Sigma \mathbf{W}, \quad \text{Sendo: } \mathbf{W}' = \left[w_{STA}, w_{LTA} - w_{STL}, -w_{LTD}, \frac{NP_{TB}}{V} \right],$$

Para encontrar o portfolio ótimo, vamos derivar a variância com respeito ao número de contratos futuros (N); essa variação deve ser igual a zero para haver hedge perfeito do risco da empresa. Assim:

$$\frac{d\text{VAR}(R_S)}{dN} = \frac{2P_{TB}}{V} \sum_i w_i r_{i,TB} \sigma_i \sigma_{TB} + 2 \frac{P_{TB}^2}{V^2} \sigma_{TB}^2 N = 0.$$

Em que: $r_{i,TB}$ = correlação entre o i-ésimo ativo / passivo de risco e o contrato futuro de taxa de juros; σ_i = DP do i-ésimo ativo / passivo; σ_{TB} = DP do contrato futuro de taxa de juros

Resolvendo para N, o número ótimo de contratos futuros é:

$$N = - \sum_i \frac{V_i r_{i,TB} \sigma_i}{P_{TB} \sigma_{TB}}.$$



O número de contratos futuros para proteger o risco da empresa depende da correlação entre os retornos do contrato futuro e os retornos do valor da empresa

Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Aplicação: *cross hedging* com contratos futuros

Aplicando dados reais ao problema, temos:

$$\begin{aligned}r_{STA,TB} &= 0, & r_{STL,TB} &= 0, \\r_{LTA,TB} &= -.6725, & r_{LTD,TB} &= .7834, \\ \sigma_{LTD} &= .0908, & \sigma_{LTA} &= .0482, \\ \sigma_{TB} &= .0766 & V_{TB} &= \$70,250.\end{aligned}$$



A correlação entre o contrato futuro e o os ativos de longo prazo confirmam a estratégia do CFO de que os futuros de taxa de juros serão um bom *hedge* para o valor da empresa e para a dívida: correlação negativa com ativos (-0,6725) e positiva com a dívida (0,7834)

$$\begin{aligned}N &= \frac{-V_{LTA}r_{LTA,TB}\sigma_{LTA}}{P_{TB}\sigma_{TB}} + \frac{-V_{LTD}r_{LTD,TB}\sigma_{LTD}}{P_{TB}\sigma_{TB}} \\ &= \frac{-(200 \times 10^6)(-.6725)(.0482)}{(70.25 \times 10^3)(.0766)} + \frac{-(-96 \times 10^6)(.7834)(.0908)}{(70.25 \times 10^3)(.0766)} \\ &= 1,205 \text{ contracts} + 1,269 \text{ contracts.}\end{aligned}$$

Os números mostram que o CFO deve comprar 1.205 contratos como hedge do valor dos ativos + 1.269 contratos como hedge do valor da dívida de longo prazo

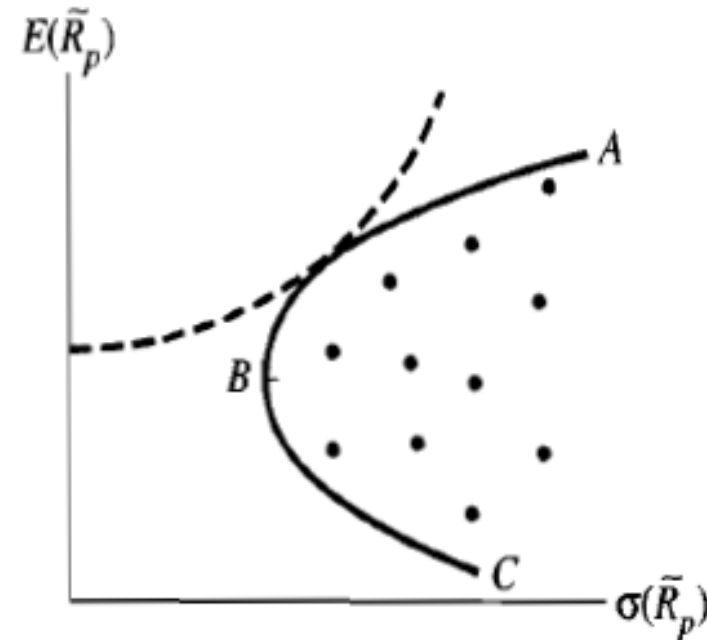
Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Conjunto de Oportunidades com N Ativos de Risco

Com N ativos, o conjunto de oportunidades de investimento tem o mesmo formato discutido para uma carteira com dois ativos

Diferença: *com N ativos, alguns ativos podem estar no interior do conjunto de oportunidades de investimento*, como mostrado no gráfico ao lado

- ⇒ Conjunto de oportunidades é composto por vários portfólios e por alguns ativos individuais que são eficientes em média-variância por si mesmos
- ⇒ se não houver ativo livre de risco, investidor avesso ao risco maximiza sua utilidade por meio do ponto de tangência entre o conjunto eficiente e sua curva de indiferença mais alta: para fazer isso, é necessário estimar todas as variâncias e covariâncias dos ativos existentes

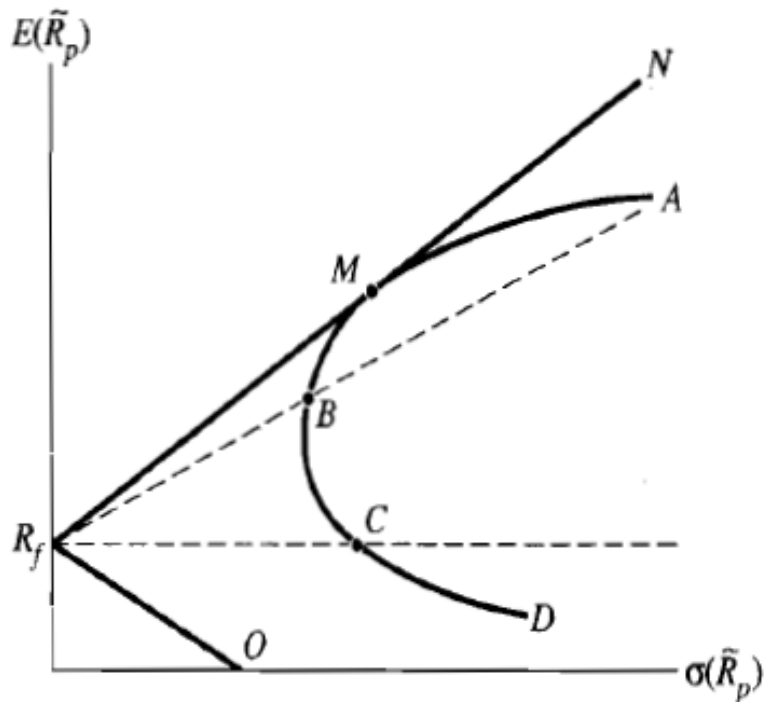


Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

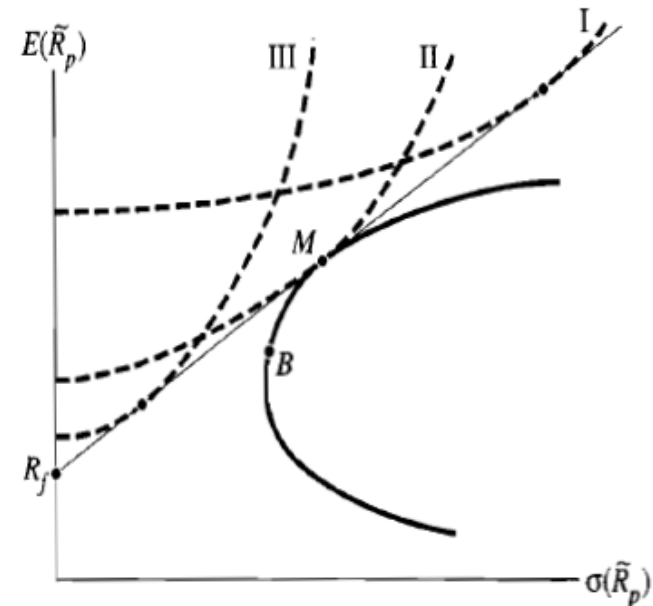
Conjunto de Oportunidades com N Ativos de Risco e um Ativo Livre de Risco

Se houver um ativo livre de risco, o problema da alocação torna-se mais simples

Vamos assumir que a taxa de retorno do ativo livre de risco é a mesma taxa para dar e tomar empréstimos: podemos definir uma reta entre o ativo livre de risco e qualquer portfolio de risco: pontos ao longo da reta representam combinações entre o ativo livre de risco e os portfolios de risco (gráfico abaixo)



Portfolio de risco M do conjunto eficiente é o único que maximiza a utilidade dos investidores independente do seu grau de aversão ao risco:



Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Conjunto de Oportunidades com N Ativos de Risco e um Ativo Livre de Risco

A introdução do ativo livre de risco cria a oportunidade para trocas de fundos na economia, gerando o *princípio da separação em dois fundos: existe um único preço do risco determinado pelo equilíbrio de mercado, que é utilizado nas decisões de portfolio*

Se adicionarmos o pressuposto de que os investidores são homogêneos em suas crenças sobre a distribuição dos retornos dos ativos $\Rightarrow$ todos os investidores perceberão o mesmo conjunto eficiente

Logo: todos os investidores terão alguma combinação do ativo livre de risco e do portfolio M

Condição para o equilíbrio de mercado: conjunto de preços que “limpam o mercado” (*clearing prices*) $\Rightarrow$ a existência de equilíbrio pressupõe que todos os preços devem ser ajustados de forma que não haja excesso de demanda por nenhum ativo e todos os ativos devem ser demandados

No equilíbrio há um único ponto de tangência em M, para o qual ***todos os investidores combinam suas trocas pela taxa livre de risco e todos os ativos são demandados de acordo com seus pesos de mercado no portfolio M***

Sendo V_i o valor de mercado do i -ésimo ativo, então o percentual da riqueza alocado em cada ativo é igual à taxa do valor de mercado do ativo em relação ao valor de mercado de todos os ativos. Matematicamente:

$$w_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}$$

Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Linha do Mercado de Capitais (CML)

O intercepto é dado pelo ativo livre de risco e a inclinação é dada por $[E(R_m) - R_f]/\sigma(R_m)$. Assim, a equação da CML é:

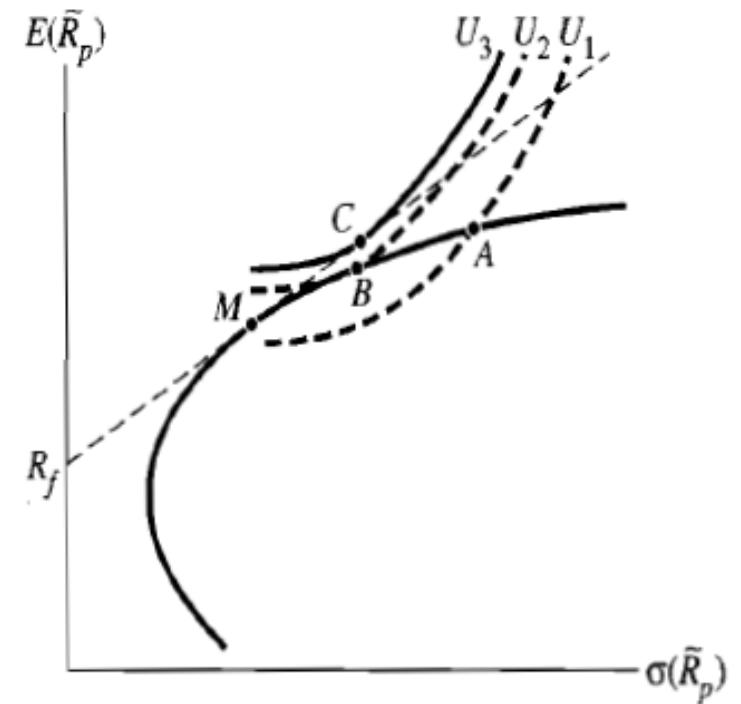
$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)} \sigma(R_p)$$

Na decisão ótima com risco, o mercado de capitais e as trocas pela taxa de juros livre de risco deixam todos em melhor situação: dada uma dotação inicial no ponto A, podemos nos mover até o ponto B, em que a utilidade é maximizada

Com o mercado de capitais, iremos nos mover até o ponto M e, por meio de trocas, alcançaremos o ponto C, onde a utilidade U_3 é maior

Temos, portanto, 3 importantes resultados:

- 1) Nenhum investidor fica em pior situação com o mercado de capitais;
- 2) O princípio da separação em dois fundos é verdadeiro; e
- 3) No equilíbrio: TMS é a mesma para todos os indivíduos, independentemente de sua atitude perante o risco



Portfolio Ótimo com Muitos Ativos

Linha do Mercado de Capitais (CML)

Se a TMS entre risco e retorno é a mesma para todos os indivíduos, então a inclinação da CML é o preço de mercado do risco (PMR):

$$PMR = TMS_{\sigma(R_P)}^{E(R_P)} = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)}$$

Decisões de alocação de produção podem ser tomada independentemente do perfil de risco dos indivíduos

Também, para cada indivíduo: $TMS = TMT = PMR$

Diversificação de Portfolio e Risco Individual dos Ativos

Variância de um portfolio com N ativos

Seja a variância do portfolio com N ativos dada por:

$$\text{VAR}(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij},$$

Conforme o número de ativos aumenta, a variância do portfolio diminui e se aproxima da covariância

Suponha um portfolio em que todos os ativos tem o mesmo peso ($w = 1/N$). Neste caso, a variância é dada por:

$$\text{VAR}(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sigma_{ij} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}.$$

Podemos separar essa expressão nos termos da variância e da covariância, conforme segue:

$$\text{VAR}(R_p) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \sigma_{ij}$$

Suponha que a maior variância individual de um ativo é igual a L. Então o primeiro termo (variância) é sempre menor ou igual a:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N L = \frac{LN}{N^2} = \frac{L}{N}.$$

Conforme o número de ativos aumenta, esse termo tende a zero:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L}{N} = 0.$$

Por outro lado, o termo da covariância se mantém. Seja $\bar{\sigma}_{ij}$ a covariância média. Então, há $(N^2 - N)$ termos de covariância no segundo termo da variância do portfolio, todos iguais a $\bar{\sigma}_{ij}$; assim, podemos reescrever este termo:

$$\frac{1}{N^2} (N^2 - N) \bar{\sigma}_{ij} = \frac{N^2}{N^2} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{N}{N^2} \bar{\sigma}_{ij}$$

O limite deste termo quando N tende ao infinito é:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N^2}{N^2} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{N}{N^2} \bar{\sigma}_{ij} \right) = \bar{\sigma}_{ij}$$

Diversificação de Portfolio e Risco Individual dos Ativos

Variância de um portfolio com N ativos

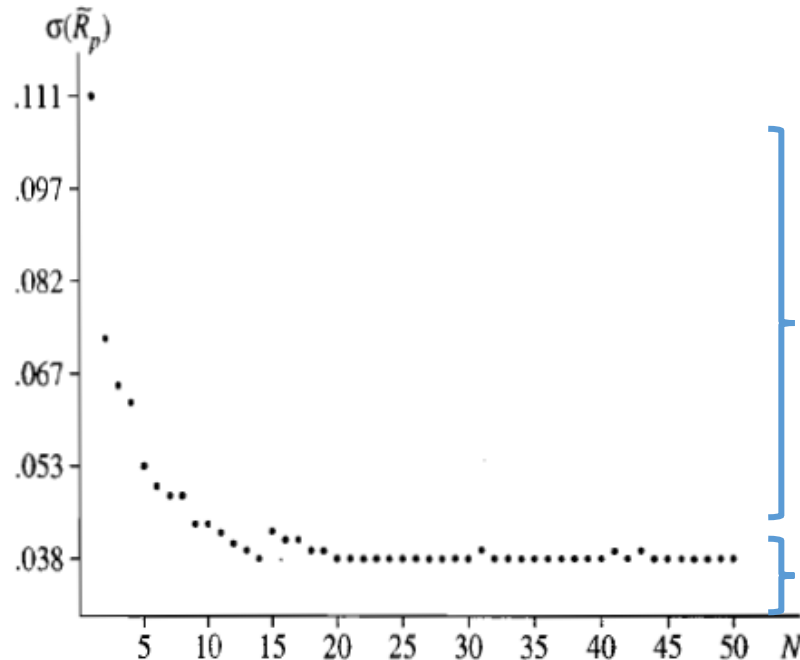
Outra forma de ver a contribuição de risco de um ativo individual para o portfolio é avaliar sua contribuição para o risco total do portfolio

Isso pode ser feito pela derivada da variância do portfolio com respeito ao peso de cada ativo (w_i):

$$\frac{\partial \text{VAR}(R_p)}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^N w_j\sigma_{ij}.$$

Se considerarmos $w_i = 1/N$, conforme N aumenta, w_i se aproxima de zero e $\sum w_j \rightarrow 1$

⇒ *para portfolios bem diversificados, a medida apropriada da contribuição de um ativo para o risco do portfolio é sua covariância com os demais ativos*



Risco diversificável (específico)

Risco não diversificável (sistêmico):
covariância

Diversificação de Portfolio e Risco Individual dos Ativos

Variância de um portfolio com N ativos

Embora possamos saber a média e a variância dos retornos de um ativo, não podemos saber qual a taxa de retorno requerida pelo mercado para manter um dado ativo se ele não estiver na fronteira eficiente

Exemplo ativo I do gráfico: investidores possuem outras oportunidades de maior retorno e menor variância do que o ativo I $\Rightarrow$ conhecer a variância não é suficiente

Qualquer parcela do risco total que não seja correlacionada com a economia é irrelevante e pode ser levada a zero pela diversificação

Lei do Preço Único dos Ativos: todos os ativos e suas combinações que possuírem a mesma distribuição conjunta de retornos tem o mesmo preço em equilíbrio

Nenhum investidor racional paga prêmio de risco para evitar o risco diversificável; investidores pagam prêmio de risco para evitar a covariância $\Rightarrow$ ***covariância é a medida relevante de risco***

